Cours et exercices

de mathématiques bilingues

Cycle 4

NC - Nombres et Calculs

Nadja Bolz

2017-2020

Groupe de travail mathématiques bilingues – Académie de Strasbourg

Contenus créés par Nadja Bolz
Mise en page Dimitri Breiner

Sommaire

4 – NC – 1 :

Die Viergrundrechenart

Erinnere dich…

Die Addition :

- Das Ergebnis einer Addition heißt die Summe
- In der Summe 5 = 4 + 1 ist 4 der erste Summand und 1 der zweite Summand.

Summanden darf man vertauschen, dabei bleibt die Summe gleich.

Beispiel :
7 + 2 = 2 + 7 = 9

Beim Addieren ist also die Reihenfolge der Summanden beliebig.

Beispiel :
3 + 8 + 7 = 3 + 7 + 8 = 10 + 8 = 18

Die Subtraktion :

- Das Ergebnis einer Subtraktion heißt die Differenz
- In der Differenz 13 = 17 – 4 ist 17 der Minuend und 4 der Subtrahend

Minuend und Subtrahend darf man nicht vertauschen.

Beispiel :
14 – 8 = 6 aber 8 – 14 ist keine natürliche Zahl.

Die Multiplikation :

- Das Ergebnis einer Multiplikation heißt das Produkt
- In dem Produkt 55 = 11 × 5 ist 11 der erste Faktor und 5 der zweite Faktor

Faktoren darf man vertauschen, dabei bleibt das Produkt gleich.

Beispiel :7 × 5 = 5 × 7 = 35

Beim Multiplizieren ist also die Reihenfolge der Faktoren beliebig.

Beispiel :$0{,}25 \times 7 \times 4 = 0{,}25 \times 4 \times 7 = 1 \times 7 = 7$

Die Division :

- Das Ergebnis einer Division heißt der Quotient
- In dem Quotienten $4 = 12 \div 3$ ist 12 der Dividend und 3 der Divisor

Dividend und Divisor darf man nicht vertauschen.

Beispiel :$10 \div 5 = 2$ aber $5 \div 10 = 0{,}5$

Vorrangregeln (Prioritäten) :

Regel Nr.1 :

Die Multiplikation bzw. die Division hat Vorrang vor der Addition bzw. vor der Subtraktion !

Kurz (auf gut Deutsch) :

Punktrechnung (· und ÷) geht vor Strichrechnung (+ und -).

Regel Nr.2 :

Der Wert in der Klammer ist zuerst zu berechnen !

Merke :das heißt, dass man mit Klammern die von den Vorrangregeln geforderte Reihenfolge der Rechnungen verändern kann.

Beispiele :

- $10 - 2 \times 5 = 10 - 10 = 0$ aber $(10 - 2) \times 5 = 8 \times 5 = 40$
- $6 + 8 \div 2 = 6 + 4 = 10$ aber $(6 + 8) \div 2 = 14 \div 2 = 7$

Achtung.
Viele Taschenrechner (aber nicht alle.) verfügen über eine Vorrangautomatik.
Was ist mit deinem ?

Ein paar Übungen...

Übung 1

Rechne (und schreibe den ganzen Rechenweg auf) :

$A=7\times6+4+3\times5$ $\quad B=5+6\times3-2$ $\quad C=8\times7+5-3\times2$

Übung 2

Rechne (und schreibe den ganzen Rechenweg auf) :

$A=80-0{,}9\div3$ $\quad B=24\times0{,}5+5\div4$ $\quad C=90-5\times7+49\div7$

Übung 3

Ergänze mit den passenden Zeichen , damit die Gleichung stimmt.

a) 10 ..... 10 ..... 10 ..... 10 = 100

b) 10 ..... 10 ..... 10 ..... 10 = 2

c) 10 ..... 10 ..... 10 ..... 10 = 101

d) 10 ..... 10 ..... 10 ..... 10 = 20

Übung 4

Rechne. Sind jeweils die Klammern notwendig ? Erkläre.

$A=13\times(8+3)$ $\quad B=3+(8\times13)$ $\quad C=(5+8)\div13$

Übung 5

Rechne (und schreibe den ganzen Rechenweg auf) :

$A=27{,}5-12{,}5-2{,}5$ $\quad B=27{,}5-(12{,}5-2{,}5)$ $\quad C=54\div9\div3$ $\quad D=54\div(9\div3)$

Übung 6

Rechne geschickt :

$A=4\times0{,}65\times25$

$B=7{,}8+0{,}92+2{,}2+0{,}08+0{,}8$

$C=1{,}2+4{,}7+5{,}8+0{,}3$

$D=100\times2\times0{,}5\times0{,}01$

Übung 7

Rechne.

$A=(8+9+6)\times5$

$B=(8+9)\times(6+5)$

$C=8+(9-6\div5)$

$D=4\times\left[\dfrac{12}{11-5}\right]$

$E=\left[\dfrac{26-17}{2}\right]\times3$

$F=6-[4-16\div(5+3)]$

Übung 8

Rechne (und schreibe den ganzen Rechenweg auf) :

$A=\dfrac{17+4}{10}$ $\quad B=\dfrac{5}{6-4}$ $\quad C=\dfrac{8}{\frac{4}{5}}$ $\quad D=\dfrac{\frac{8}{4}}{5}$

Übung 9

Füge Klammern hinzu, damit das Ergebnis stimmt.

a) $5\times3+8=55$

b) $9+4\times7=37$

c) $12-5\times8=56$

d) $3\times4+2\times7=26$

e) $36\div3+6=4$

f) $100+4+6\times10=200$

Übung 10

1. Schreibe 28 als eine Summe zweier Summanden
2. Schreibe 35 als ein Produkt zweier Faktoren
3. Schreibe 28 als ein Produkt zweier Summen
4. Schreibe 35 als eine Summe zweier Produkte

Übung 11

1. Schreibe zu jedem Satz einen mathematischen Ausdruck.
   a) Die Summe des Produktes von acht mit fünf und drei
   b) Das Produkt von vier mit der Summe von fünfzehn und zwei
2. Schreibe zu jedem Ausdruck einen Satz.
   a) $45 - 7 \times 3$
   b) $(9 + 12) :5$

Übung 12

Der Flächeninhalt meines Gartens beträgt 300 m².
Am Montag habe ich 48 m² davon gewässert.
Für den Rest des Gartens habe ich dann 4 Tage gebraucht, und habe an jedem Tag gleich große Flächen gewässert.

Wie groß sind diese Flächen ? Schreibe einen mathematischen Ausdruck.

Übung 13

Anke hat 18 € für 4 Teddybären ausgegeben.
Sylvie kauft einen ähnlichen Teddybären und bezahlt mit ihrem Taschengeld.
Sie hatte 30 € Ersparnisse.

Wie viel bleibt ihr übrig ? Schreibe einen (einzigen.) mathematischen Ausdruck.

Übung 14

Paul geht mit einem 10€-Schein einkaufen.
In der Bäckerei kauft er drei Brötchen zu je 0,75€ und ein Brot zu 1,90€.
Er geht dann zur Post und kauft vier Briefmarken zu je 0,60 €.
Im Geschäft kauft er dann noch ein halbes Kilo Kartoffel zu 3€ das Kilo.

Wie viel bleibt ihm übrig ? Schreibe einen (einzigen.) mathematischen Ausdruck !

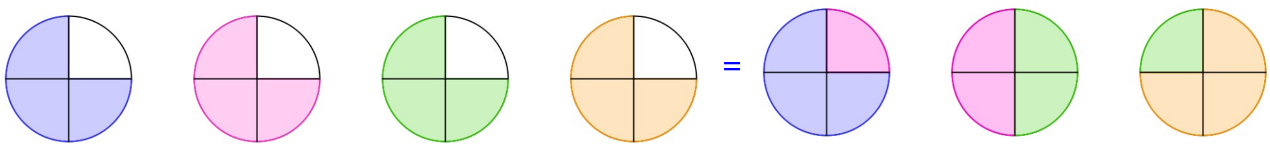
4 – NC – 2 – 1 :

Bruchzahlen

Erinnere dich...

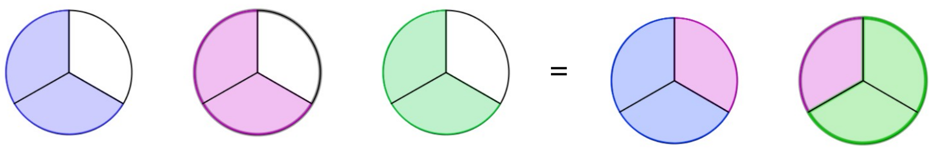
Bruchzahl und Quotient :

Beispiel Nr.1 :



also gilt : $4 \times \frac{3}{4} = 3$, $\frac{3}{4}$ ist die Zahl mit der man 4 multiplizieren muss, um 3 zu erhalten.

Beispiel Nr.2 :



also gilt : $3 \times \frac{2}{3} = 2$, $\frac{2}{3}$ ist die Zahl mit der man 3 multiplizieren muss, um 2 zu erhalten.

$\frac{5}{8}$ ist eine Bruchzahl. Dabei heißt 5 der Zähler und 8 der Nenner des Bruches.
Eine Bruchzahl, bei der Zähler und Nenner ganze Zahlen sind heißt Bruch.
Daher ist $\frac{5}{8}$ ein Bruch.

Wortschatz :

Auf Deutsch ...

- heißen Brüche mit dem Zähler 1 Stammbrüche !
- heißt ein Bruch echter Bruch, wenn der Zähler kleiner als der Nenner ist !
- heißt ein Bruch unechter Bruch, wenn der Zähler größer als der Nenner ist !

Weitere Beispiele :

- $4 \times \frac{5}{4} = 5$ und $\frac{5}{4} = 1{,}25$

- $10 \times \frac{1}{10} = 1$ und $\frac{1}{10} = 0{,}1$

- $3 \times \frac{4}{3} = 4$ und $\frac{4}{3}$ ist keine Dezimalzahl.

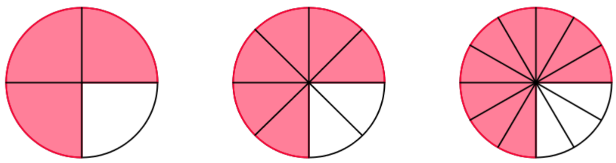
- $5 \times \frac{0}{5} = 0$ und $\frac{0}{5} = 0$

- $0 \times \frac{?}{?} = 8$ ist unmöglich, daher darf der Nenner eines Bruches nie 0 sein.

Gleichwertige Brüche :

- Erweitern eines Bruches heißt, Zähler und Nenner mit der gleichen, von 0 verschiedenen Zahl multiplizieren.
- Kürzen eines Bruches heißt, Zähler und Nenner durch die gleiche, von 0 verschiedene Zahl dividieren.

Beispiel :



also gilt : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

Durch Erweitern und Kürzen ändert man den Wert einer Bruchzahl nicht !

Übung :

Schreibe als einen voll gekürzten Bruch :

$\frac{21}{14}$; $\frac{1{,}5}{2{,}5}$; $\frac{1{,}2}{3{,}6}$; $\frac{1{,}5}{9}$

Brüche vergleichen :

- Brüche heißen gleichnamig (bzw. ungleichnamig), wenn ihre Nenner gleich (bzw. ungleich) sind
- Bei gleichnamigen Brüche ist der Größenvergleich besonders einfach :

Beispiel :

5 < 7, also gilt auch : $\frac{5}{11} < \frac{7}{11}$

- Sind die Brüche nicht gleichnamig, so muss man sie durch Erweitern oder Kürzen gleichnamig machen :

Beispiele :

$\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$ und $\frac{20}{16} > \frac{13}{16}$, also gilt : $\frac{5}{4} > \frac{13}{16}$

$\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$, $\frac{7}{6} = \frac{14}{12}$ und $\frac{15}{12} > \frac{14}{12}$, also gilt : $\frac{5}{4} > \frac{7}{6}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

In meiner Manteltasche habe ich 15 gelbe, 9 rote und 12 grüne Murmeln.

1. Was ist der Bruchteil der gelben Murmeln ?
2. Was ist der Bruchteil der roten Murmeln ?
3. Was ist der Bruchteil der grünen Murmeln ?

Übung 2

Familie Schmitt besteht aus 8 Personen :

- Simone (48 Jahre)
- Friedrich (47 Jahre)
- Manuela (22 Jahre)
- Kai (18 Jahre)
- Fritz (14 Jahre)
- Franz (14 Jahre)
- Volker (11 Jahre)
- Lars (8 Jahre)

Was ist in dieser Familie :

1. der Bruchteil der Mädchen ?
2. der Bruchteil der Jungen ?
3. der Bruchteil der Volljährigen ?
4. der Bruchteil der volljährigen Mädchen ?
5. der Bruchteil der minderjährigen Jungen ?

Übung 3

Schreibe ab und ergänze :

$4\times\frac{\dots\dots}{\dots\dots}=1$ $\qquad$ $5\times\frac{\dots\dots}{\dots\dots}=2$ $\qquad$ $5\times\frac{3}{5}=\dots\dots$

$5\times\frac{\dots\dots}{\dots\dots}=1$ $\qquad$ $2\times\frac{\dots\dots}{\dots\dots}=7$ $\qquad$ $\dots\dots\times\frac{8}{3}=8$

Übung 4

Kürze vollständig folgende Brüche :

- $\frac{14}{6}$
- $\frac{45}{18}$
- $\frac{8}{6}$
- $\frac{12}{16}$
- $\frac{22}{48}$
- $\frac{54}{36}$
- $\frac{35}{25}$
- $\frac{20}{25}$
- $\frac{50}{36}$
- $\frac{100}{30}$
- $\frac{40}{70}$
- $\frac{15}{10}$

Übung 5

Schreibe folgende Quotienten als vollständig gekürzte Brüche :

- $\frac{12}{0,3}$
- $\frac{4,5}{8,6}$
- $\frac{9,05}{2,7}$
- $\frac{2,38}{92,76}$

Übung 6

Vergleiche :

1. $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{10}$
2. $\frac{5}{27}$ und $\frac{1}{9}$
3. $\frac{5}{4}$ und $\frac{7}{6}$
4. $\frac{11}{5}$; $\frac{13}{6}$ und $\frac{67}{30}$
5. $\frac{18}{17}$; $\frac{19}{17}$; $\frac{17}{18}$ und $\frac{16}{18}$

Übung 7

Rechne :

- $0,9 \div 0,3$
- $0,008 \div 0,02$
- $0,54 \div 0,27$
- $0,8 \div 0,02$
- $1,53 \div 0,3$
- $24 \div 0,8$

Übung 8

2,4 kg Orangen kosten 3,60€.
Wie teuer ist 1kg ?

Übung 9

Lars hat 1,600 kg weiße Rüben gekauft und 1,28 € bezahlt.
Wie teuer ist 1 kg Rüben ?

Übung 10

Mario hat 480 Gramm Kirschen gekauft und 1,44 € bezahlt.
Wie teuer ist 1 kg Kirschen ?

Übung 11

Linda rennt 75 m in 12,5 Sekunden.
Welche Entfernung legt sie in einer Sekunde zurück ?

Bruchteil

Erinnere dich...

Beispiel Nr.1 :

9 der 24 Schüler der Klasse tragen eine Brille.
Welcher Bruchteil der Schüler trägt eine Brille ?

- Antwort :

$\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$ der Schüler tragen eine Brille.

Beispiel Nr.2 :

Insgesamt zählt meine Schule 960 Schüler. $\frac{2}{5}$ diser Schüler gehören zum Schulchor.

Wie viele Schüler singen im Chor mit ?

- Antwort Nr.1 :

$\frac{2}{5}=\frac{384}{960}$ → 384 Schüler gehören zum Schulchor.

- Antwort Nr.2 :

$\frac{1}{5}$ von 960 Schüler = 960 ÷ 5 = 192. $\frac{2}{5}$ von 960 Schüler = 192 × 2 = 384 →384 Schüler gehören zum Schulchor. (kürzer heißt es auch : $\frac{2}{5}$ von 960 = 2 × $\frac{960}{5}$ = 2 × 192 = 384)

Beispiel Nr.3 :

240 Schüler kommen zu Fuß in die Schule, das sind $\frac{3}{7}$ der gesamten Schüleranzahl.

Wie viele Schüler zählt die Schule ?

- Antwort Nr.1 :

$\frac{3}{7}=\frac{240}{560}$:die Schule zählt 560 Schüler

- Antwort Nr.2 :

$\frac{3}{7}$ der Schüler sind 240 Schüler. $\frac{1}{7}$ der Schüler sind also 240 ÷ 3 = 80 Schüler

$\frac{7}{7}$ der Schüler sind also 80 × 7 = 560 Schüler :die Schule zählt 560 Schüler

Ein paar Übungen...

Übung 1
Von den 490 Schüler der Schule haben 140 einen Hund als Haustier.
Welcher Bruchteil der Schüler hat einen Hund ?

Übung 2
Um einen Kuchen zu backen braucht man 480 g Zucker. Die Packung enthält noch 640 g Zucker.
Welchen Bruchteil der angebrochenen Packung braucht man, um den Kuchen zu backen ?

Übung 3
In der Klasse lernen 9 Schüler von 24 Latein.
Roman behauptet, dass $\frac{5}{8}$ der Schüler kein Latein lernen.
Hat er recht ? Begründe !

Übung 4
Simons Briefmarkensammlung besteht aus 210 Stück.
$\frac{3}{7}$ der Briefmarken stammen aus ausländischen Ländern.
Wie viele Briefmarken stammen nicht aus dem Ausland ?

Übung 5
In einer Schule besteht der Sportverein aus :
- einem Drittel 11-Jährigen
- einem Viertel 12-Jährigen
- zwei Fünftel 13-Jährigen
- die anderen Sportler sind alle 14-jährig.

Insgesamt zählen 120 Jugendliche zu dem Sportverein.
1. Berechne die Anzahl der 11-jährigen, 12-jährigen, 13-jährigen und 14-jährigen Sportler des Vereins.
2. Welcher Bruchteil der Sportler ist 14-jährig ?

Übung 6
$\frac{3}{8}$ der 32 Kinder des Turnvereins kommen mit dem Fahrrad trainieren.
Wie viele Kinder kommen mit dem Fahrrad ?

Übung 7

Franz sammelt Modellautos.
Fünf sechstel seiner Autos sind aus Plastik, die anderen sind aus Metall.

1. Wie viele Autos sind aus Plastik, wenn er insgesamt 48 Autos besitzt ? Erkläre.
2. Wie viele Autos besitzt er insgesamt, wenn er 35 Plastikautos hat ? Erkläre !

Übung 8

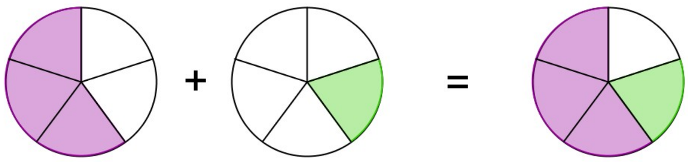
$\frac{3}{8}$ der befragten Personen, d.h. 111 Leute, mögen Spinat.
Wie viele Personen wurden befragt ?

4 – NC – 2 – 5 :

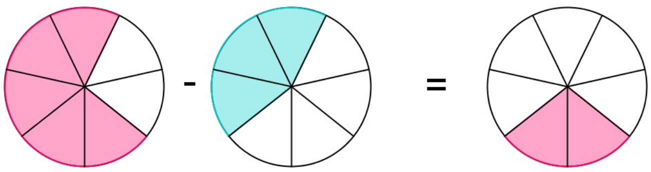
Bruchzahlen addieren und subtrahieren

Erinnere dich...

Gleichnamige Brüche



3 Fünftel + 1 Fünftel = 4 Fünftel oder mathematisch : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$



5 Siebtel – 3 Siebtel = 2 Siebtel oder mathematisch : $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$

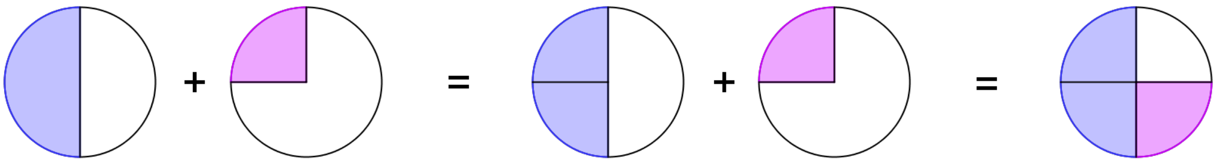
Merke dir :

Gleichnamige Brüche werden addiert (oder subtrahiert), indem man die Zähler addiert (oder subtrahiert) und den Nenner beibehält.

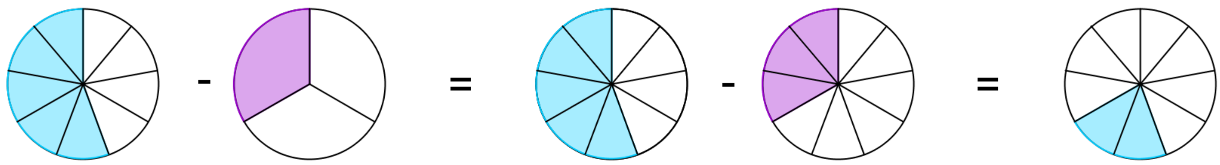
Beispiele :

- $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}$
- $\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$
- $\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9-3}{2}=\frac{6}{2}=3$

Ungleichnamige Brüche



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=\frac{2}{9}$$

Merke dir :

Ungleichnamige Brüche werden addiert (oder subtrahiert), indem man die Brüche gleichnamig macht und diese gleichnamigen Brüche dann addiert (oder subtrahiert).

Beispiele :

- $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$
- $\frac{31}{15}+\frac{3}{5}=\frac{31}{15}+\frac{9}{15}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$
- $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{16}{12}=\frac{24}{12}=2$
- $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
- $\frac{5}{3}-\frac{2}{6}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
- $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5}{15}-\frac{3}{15}=\frac{2}{15}$

Ein paar Übungen.....

Übung 1

Rechne und kürze das Ergebnis :

$A=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ $B=\frac{7}{15}+\frac{13}{15}$ $C=\frac{17}{14}-\frac{3}{14}$ $D=\frac{10}{9}-\frac{7}{9}$

Übung 2

Rechne und kürze das Ergebnis :

$A=\frac{2}{3}+\frac{7}{6}$ $B=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ $C=\frac{3}{4}+\frac{1}{12}$ $D=\frac{17}{6}-\frac{1}{2}$

$E=\frac{7}{15}+\frac{1}{3}$ $F=\frac{7}{27}-\frac{1}{9}$ $G=\frac{3}{10}-\frac{5}{100}$ $H=\frac{19}{63}-\frac{2}{9}$

Übung 3

Rechne und kürze das Ergebnis :

$A=2+\frac{1}{3}$ $B=5-\frac{3}{5}$ $C=\frac{3}{7}+4$ $D=\frac{9}{4}-2$

Übung 4

Rechne und kürze das Ergebnis :

$A=\frac{5}{4}+\frac{1}{12}+\frac{3}{4}$ $C=\frac{17}{15}-\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{15}\right)$

$B=1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ $D=\frac{4}{3}-\left(\frac{11}{9}-\frac{2}{3}\right)$

Übung 5

Rechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$A=\frac{7{,}8}{1{,}3}-\frac{2}{3{,}9}$ $C=\frac{3{,}2}{7}-\frac{2{,}5}{7}$ $E=\frac{2{,}15}{3}+\frac{5}{0{,}3}$

$B=\frac{4}{1{,}2}+\frac{7}{0{,}4}$ $D=\frac{3}{1{,}3}+\frac{2}{2{,}6}$ $F=\frac{14}{0{,}5}-\frac{2}{0{,}25}$

Übung 6

Rechne und kürze das Ergebnis:

$A=\frac{4}{3}+\frac{10}{6}$ $B=\frac{9}{15}-\frac{1}{5}$ $C=\frac{10}{25}+\frac{7}{5}$ $D=\frac{63}{81}-\frac{2}{9}$

Übung 7

Tobias, Otto und Laura wollen Klassensprecher werden.

Tobias hat $\frac{1}{3}$ der Stimmen erhalten und Otto hat $\frac{5}{12}$ der Stimmen erhalten.

1. Welcher Bruchteil der Stimmen hat Laura erhalten ?
2. Wer wird dann gewählt ? Begründe deine Antwort.

Übung 8

Die Schüler der Klasse arbeiten in Gruppen : $\frac{1}{3}$ der Schüler macht Geometrieübungen, $\frac{4}{9}$ lernen die Mathelektion und der Rest verbessert die Klassenarbeit.

1. Welcher Bruchteil der Schüler verbessert seine Klassenarbeit ?
2. 12 Schüler lernen die Lektion. Wie viele Schüler sind es in der Klasse ?

4 – NC – 2 – 6 :

Bruchzahlen multiplizieren

Erinnere dich...

Eine ganze Zahl mit einem Bruch multiplizieren

Merke dir :

$$5\times\frac{4}{3} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{5\times4}{3} = \frac{20}{3}$$

Regel Nr.1 :

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit dieser Zahl multipiziert wird, und der Nenner beibehalten wird.

Rechne :

$A=4\times\frac{1}{7}$ $B=\frac{2}{3}\times5$ $C=\frac{3}{4}\times4$ $D=6\times\frac{5}{6}$ $E=\frac{3}{8}\times4$

Beispiel :

(siehe auch Kapitel 4 – NC – 2 – 2)

Insgesamt zählt meine Schule 960 Schüler. $\frac{2}{5}$ dieser Schüler gehören zum Schulchor.

Wie viele Schüler singen im Chor mit ?

Was wir schon gelernt haben : $\frac{2}{5}$ von 960 = 2 × $\frac{960}{5}$ = 2 × 192 = 384

Jetzt können wir das anders schreiben, nämlich :

$\frac{2}{5}$ von 960 = 2 × $\frac{960}{5}$

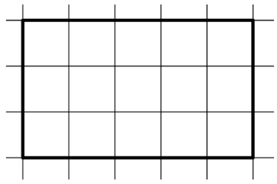
$\frac{2}{5}$ von 960 = $\frac{2\times960}{5}$

$\frac{2}{5}$ **von** 960 = $\frac{2}{5}$ **×** 960

Zwei Brüche miteinander multiplizieren

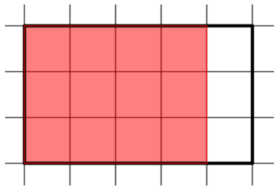
Beispiel :

Das ist mein Garten :

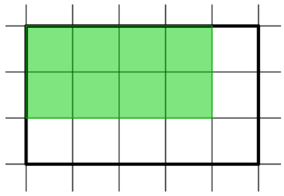


Wie viel sind $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ meines Gartens ?

- Das sind $\frac{4}{5}$ meines Gartens :



- Also sind das $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ meines Gartens :



Das heißt, dass $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Merke dir :

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$$

Regel Nr.2 :

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multipliziert.

Rechne :

$A=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}$ $B=\frac{10}{9}\times\frac{4}{3}$ $C=\frac{3}{4}\times\frac{11}{2}$

Produkte geschickt berechnen

Beispiel :

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{7} = \frac{3\times2}{2\times7} = \frac{3\times2}{7\times2} = \frac{3}{7}\times\frac{2}{2} = \frac{3}{7}\times1 = \frac{3}{7}$$

Es ist oft günstig einen Bruch zu kürzen, bevor man das Produkt berechnet.

Rechne geschickt :

$A=5\times\frac{4}{5}$ $C=\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}$ $E=\frac{21}{8}\times\frac{4}{14}$ $G=\frac{6}{5}\times\frac{25}{18}$

$B=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{3}$ $D=\frac{4}{7}\times\frac{14}{3}$ $F=\frac{8}{35}\times\frac{7}{12}$ $H=\frac{121}{56}\times\frac{7}{33}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Berechne folgende Bruchteile.

a) $\frac{2}{3}$ von 18

c) $\frac{3}{7}$ von 420

b) $\frac{5}{4}$ von 24

d) $\frac{17}{11}$ von 55

Übung 2

Rechne.

$A=\frac{7}{3}\times\frac{4}{5}$ $B=\frac{15}{3}\times\frac{4}{13}$ $C=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}$ $D=\frac{13}{4}\times\frac{3}{21}$

Übung 3

Rechne.

$A=\frac{5}{7}\times\frac{7}{4}$ $B=\frac{15}{2}\times 4$ $C=\frac{5}{12}\times\frac{6}{11}$ $D=\frac{21}{8}\times\frac{4}{14}$

Übung 4

Rechne.

$A=\frac{15}{18}\times\frac{9}{25}$ $B=1{,}8\times\frac{10}{9}$ $C=\frac{24}{49}\times\frac{7}{8}$ $D=\frac{4}{33}\times 55$

Übung 5

Rechne.

$A=\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)$ $B=\frac{25}{8}-\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)$ $C=1-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}\right)$ $D=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}$

Übung 6

Simons Briefmarkensammlung besteht aus 210 Stück. $\frac{3}{7}$ der Briefmarken stammen aus ausländischen Ländern.
Wie viele Briefmarken stammen nicht aus dem Ausland ?

Übung 7

In einem Fußballverein sind $\frac{3}{8}$ der Spieler Ausländer. $\frac{2}{3}$ der ausländischen Spieler stammen aus Russland.
Welcher Bruchteil der Spieler des Vereins stamt aus Russland ?

Übung 8

Ein Becher kann $\frac{8}{3}$ L enthalten. Dieser Becher wird zu den $\frac{3}{4}$ mit Wasser ausgefüllt.

Wie viel Liter Wasser enthält das Glas ?

Übung 9

Julian hat ein Viertel des Kuchens beim Mittagessen gegessen und ein Viertel des Rests gegen vier Uhr.

Welcher Bruchteil des Kuchens bleibt für das Abendessen übrig ?

Positive und negative Bruchzahlen multiplizieren

Erinnere dich...

Regel für die Multiplikation zweier Brüche :

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multipliziert :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Beispiele :

- $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3} = \frac{2\times 5}{7\times 3} = \frac{10}{21}$
- Wenn möglich sollte man vor dem Multiplizieren **kürzen** !
  $\frac{-3}{7}\times\frac{14}{9} = \frac{-3\times 14}{7\times 9} = \frac{-3\times 2\times 7}{7\times 3\times 3} = -\frac{2}{3}$
- Zuerst sollte man das **Vorzeichen** des Ergebnisses bestimmen !
  $\frac{-4}{9}\times\frac{-5}{-12} = -\frac{4\times 5}{9\times 12} = -\frac{4\times 5}{9\times 4\times 3} = -\frac{5}{9\times 3} = -\frac{5}{27}$

Regel für die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch :

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit dieser Zahl multipliziert und der Nenner beibehalten wird.

Beispiele :

$3\times\frac{5}{14} = \frac{3\times 5}{14} = \frac{15}{14}$

$\frac{7}{8}\times(-2) = -\frac{7\times 2}{8} = -\frac{7\times 2}{4\times 2} = -\frac{7}{4}$

Wortschatz :

- des fractions de même dénominateur :gleichnamige Brüche
- le nombre en écriture fractionnaire :die Bruchzahl ou die gebrochene Zahl
- la fraction décimale :der Zehnerbruch ou der Dezimalbruch
- commuter :vertauschen

« Faktoren darf man vertauschen, dabei bleibt das Produkt gleich »

Ein paar Übungen...

Übung 1

Rechne.

$A=\frac{-3}{5}\times\frac{1}{2}$ $\quad$ $C=\frac{4}{-11}\times\frac{5}{8}$ $\quad$ $E=\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}$

$B=\frac{-1}{5}\times\frac{11}{-2}$ $\quad$ $D=\frac{-8}{5}\times\frac{15}{-9}$ $\quad$ $F=\frac{4}{-7}\times\frac{14}{-9}$

Übung 2

Rechne (*denke daran, zu kürzen*).

$A=\frac{10}{21}\times\frac{-7}{15}$ $\quad$ $B=\frac{-4}{3}\times\frac{5}{-3}\times\frac{-1}{7}$ $\quad$ $C=\frac{7}{8}\times(-6)\times\frac{-2}{21}$

Übung 3

Rechne.

$A=\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)\times\frac{6}{5}$ $\quad$ $C=\frac{1}{9}-\frac{15}{9}\times\frac{1}{6}$ $\quad$ $E=-0{,}25\times\frac{3}{10}\times\frac{-4}{-9}$

$B=\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\right)$ $\quad$ $D=\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{7}-2\right)\times\frac{21}{4}$ $\quad$ $F=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{12}{7}-18\times\frac{7}{27}$

Übung 4

In Spanien sind $\frac{1}{3}$ der ausländischen Touristen Engländer und $\frac{1}{5}$ sind Deutsche. Die ausländischen Touristen anderer Staatsbürgerschaft sind 24,5 Millionen. Wie viele ausländische Touristen sind es, die ihren Urlaub in Spanien verbringen ?

Übung 5

Peter und Marie wollen ihrer Großmutter etwas Schönes schenken.

Peter sagt :„Ich kann $\frac{4}{7}$ des Preises bezahlen“.

Marie fügt hinzu :„Und wenn wir noch 2,50 € dazurechnen, so können wir schon $\frac{3}{4}$ des Preises bezahlen„.

Wie teuer ist das Geschenk ?

Übung 6

Es werden 1 200 kg Orangenblüten gebraucht, um 1 Liter ätherisches Öl herzustellen.
Ein Landwirt hat 3 000 kg Orangenblüten geerntet.

Wie viele $\frac{2}{3}$ L Flaschen kann er herstellen ?

Übung 7

In einem Fußballverein sind $\frac{3}{8}$ der Spieler Ausländer.

$\frac{2}{3}$ der ausländischen Spieler stammen aus Russland.

Wie viele Spieler stammen aus Russland, wenn insgesamt 216 Spieler dem Verein angehören ?

Bruchzahlen dividieren

Erinnere dich...

Zueinander reziproke Brüche :

Zwei Brüche heißen zueinander reziprok, wenn ihr Produkt 1 ergibt :

$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{3\times2}{2\times3} = 1$ $\qquad 5\times\frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$ $\qquad \frac{1}{3}\times3 = 1$

Kehrwert :

a und b bezeichnen zwei ganze Zahlen , $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

- Die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ sind zueinander reziprok.
- $\frac{b}{a}$ heißt der Kehrwert von $\frac{a}{b}$.

Beispiele :

- $\frac{5}{7}$ ist der Kehrwert von $\frac{7}{5}$ und $\frac{7}{5}$ ist der Kehrwert von $\frac{5}{7}$
- $\frac{1}{2}$ ist der Kehrwert von $\frac{2}{1}=2$

Regel für die Division zweier Brüche :

b , c , d bezeichnen positive oder negative Zahlen, die ungleich Null sind.

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert dieses Bruches multipliziert :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Beispiele :

$$A = \frac{2}{3}\div\frac{5}{4} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$B = -\frac{5}{6}\div3 = -\frac{5}{6}\times\frac{1}{3} = -\frac{5}{18}$$

$$C = -\frac{\frac{4}{9}}{\frac{16}{-3}} = -\frac{4}{9}\div\frac{16}{-3} = -\frac{4}{9}\times\frac{-3}{16} = \frac{4\times3}{3\times3\times4\times4} = \frac{1}{12}$$

Wortschatz :

- on peut employer les termes suivants :« der Kehrwert », « die Kehrzahl » ou « der Kehrbruch » pour désigner l'inverse d'un nombre en écriture fractionnaire
- Brüche mit dem Zähler 1 heißen Stammbrüche
- ein Bruch $q=\frac{z}{n}$ heißt :

  → echter Bruch wenn $z<n$ gilt
  → unechter Bruch, wenn $z>n$ gilt

Ein paar Übungen...

Übung 1

Rechne.

$A=\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}$ $C=\frac{6}{5}\div\frac{3}{2}$ $E=\frac{-15}{8}\div\frac{-10}{4}$ $G=\frac{3}{10}\div\frac{-9}{7}$

$B=\frac{-1}{5}\div\frac{1}{3}$ $D=\frac{7}{-4}\div\frac{8}{7}$ $F=-0{,}8\div\frac{5}{-2}$ $H=\frac{-7}{3}\div(-3)$

Übung 2

Rechne und ergänze.

a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$	$a\div b$
$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{7}$				
$\frac{-5}{2}$	4				
-7	$\frac{-3}{4}$				
$\frac{3}{5}$	$\frac{-10}{11}$				

Übung 3

Rechne.

$A=\dfrac{\frac{1}{-6}}{12}$ $C=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\div\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{5}\right)$ $E=\dfrac{3-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}\times 7}$

$B=\dfrac{1}{-\frac{6}{12}}$ $D=\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}$ $F=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}-\frac{2}{5}$

Übung 4

Herr Maier kauft ein neues Auto :er bezahlt $\frac{1}{5}$ des Preises bei der Bestellung und $\frac{1}{3}$ des Preises bei der Lieferung. Den Rest soll er in 14 Monatsraten bezahlen.
Welcher Bruchteil des ursprünglichen Preises beträgt eine Monatsrate ?

Übung 5

Ein Grundstück wurde in 7 parzelliert :

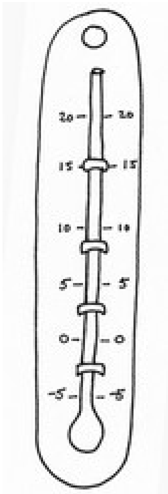
- Die erste Parzelle beträgt $\frac{1}{8}$ der gesamten Grundstückfläche.
- $\frac{3}{4}$ des restlichen Grundstücks wurden in 5 gleich großen Parzellen aufgeteilt. .

Welchem Bruchteil der ursprünglichen Grundstückfläche entsprechen die verschiedenen Parzellen ?

Positive und negative Zahlen

Erinnere dich...

Positive und negative Zahlen



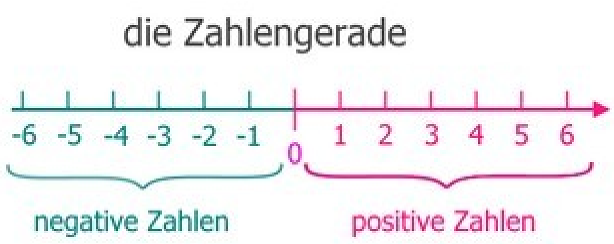
So wie es positive und negative Temperaturen gibt, gibt es auch positive und negative Zahlen :

- +5 ist eine positive ganze Zahl :ihr Vorzeichen ist "+" und ihr Betrag ist "5"
- -7 ist eine negative ganze Zahl :ihr Vorzeichen ist "-" und ihr Betrag ist "7"

Merke :
die Null ist weder positiv noch negativ.

Die Zahlengerade

Die Zahlengerade kann man als einen waagrechten Thermometer betrachten :



Eine Zahlengerade verfügt über :

- einen Ursprung 0
- eine Einheit 1
- eine Richtung

Zwei Zahlen heißen zueinander entgegengesetzt, wenn sie von 0 den gleichen Abstand haben : eine Zahl und ihre Gegenzahl besitzen verschiedene Vorzeichen, aber den gleichen Betrag.

Beispiel :

- -3 ist die Gegenzahl von +3
- +3 ist die Gegenzahl von -3

Merke :

Von zwei Temperaturen ist diejenige größer, die auf dem Thermometer weiter oben liegt.
Ähnlich gilt :

Von zwei Zahlen ist diejenige größer, deren Darstellung auf der Zahlengerade weiter rechts liegt.

Daraus folgt :

- jede positive Zahl ist größer als jede negative Zahl
- von zwei positiven Zahlen ist diejenige größer, die den größeren Betrag hat
- von zwei negativen Zahlen ist diejenige größer, die den kleineren Betrag hat

Übung :

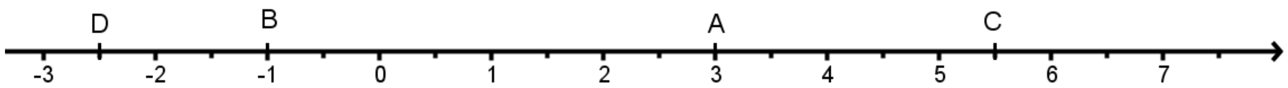
Vergleiche folgende Zahlen :

- -3 und 0
- 0 und +1
- +1 und -3
- +3 und +4
- -3 und -4
- +3,5 und +4
- -3,5 und -4

Abszisse

Auf einer Zahlengerade kann jedem Punkt eine Zahl zugeordnet werden. Diese Zahl heißt die Abszisse des Punktes.

Übung :



Gib die Abszissen der Punkte A, B, C und D an.

Ein paar Übungen...

Übung 1

Ergänze mit < oder > :

a) 75 57
b) 23 ..... -15
c) -6 4

d) -18 ..... -9
e) 102,6 ..... -102,7
f) -4,1 ..... -4,3

g) 10 001 ..... -10,01
h) -8,09 ..... -9,08
i) -10,123 .... -10,12

Übung 2

Gib in jedem Fall die nächstkleinere und die nächstgrößere ganze Zahl an :

8,91 -5,64 -24,75 0,63

Übung 3

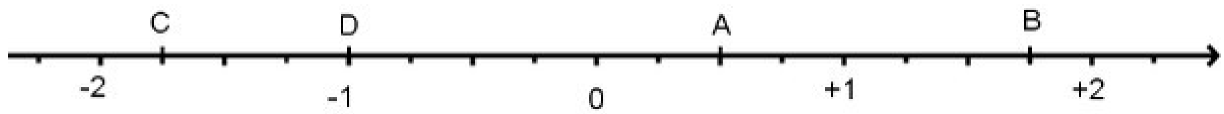
Ergänze mit der nächstkleineren und der nächstgrößeren Dezimalzahl (eine Ziffer nach dem Komma):

..... < 7,12 < .... < -5,64 < .... < -24,75 < .... < 0,63 < .....

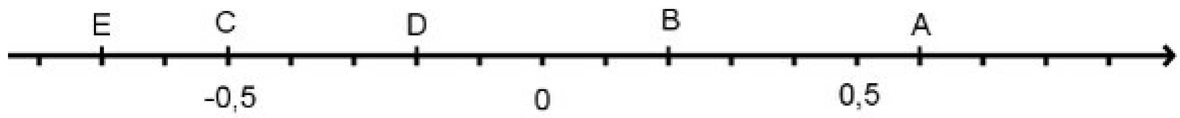
Übung 4

Gib die Abszisse folgender Punkte an :

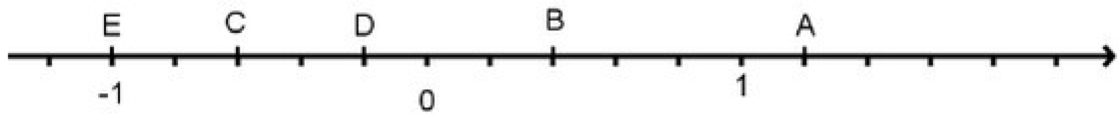
a)



b)



c)



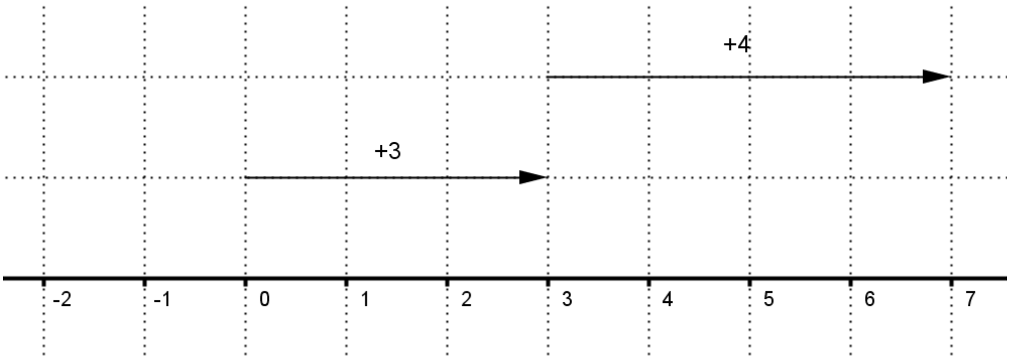
Positive und negative Zahlen addieren und subtrahieren

Erinnere dich...

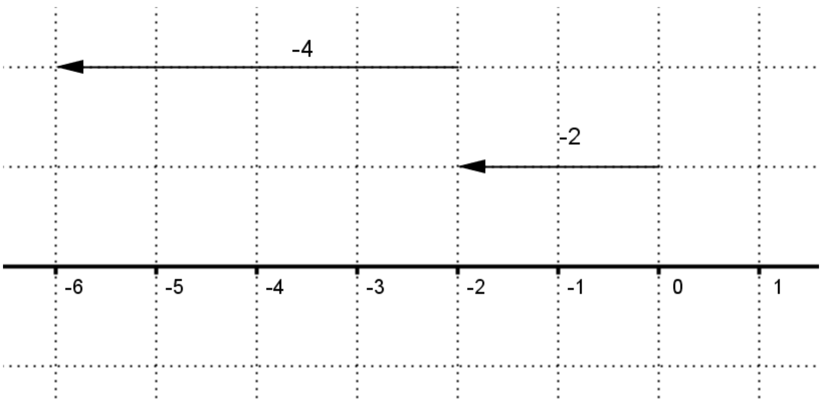
Addieren von Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen

Beispiele :

- Positive Zahlen werden durch Pfeile dargestellt, die nach rechts gerichtet sind.
- Negative Zahlen werden durch Pfeile dargestellt, die nach links gerichtet sind.



(+3) + (+4) = (+7)



(-2) + (-4) = (-6)

Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden wie folgt addiert :
- man bildet die Beträge und addiert sie
- man gibt der Summe das gemeinsame Vorzeichen der Zahlen

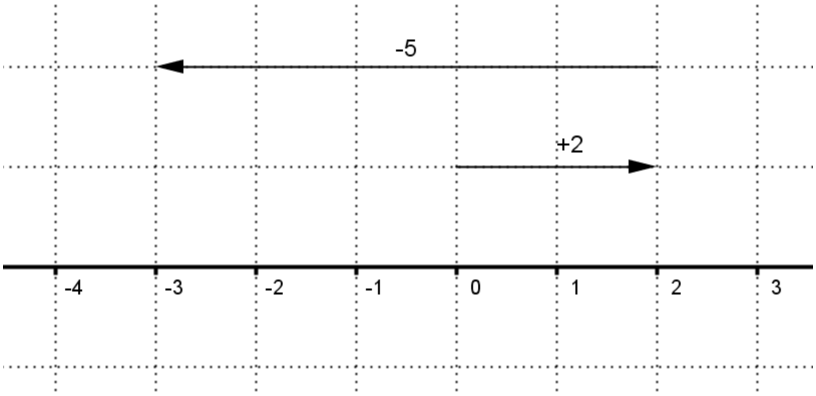
Übung :

Rechne :

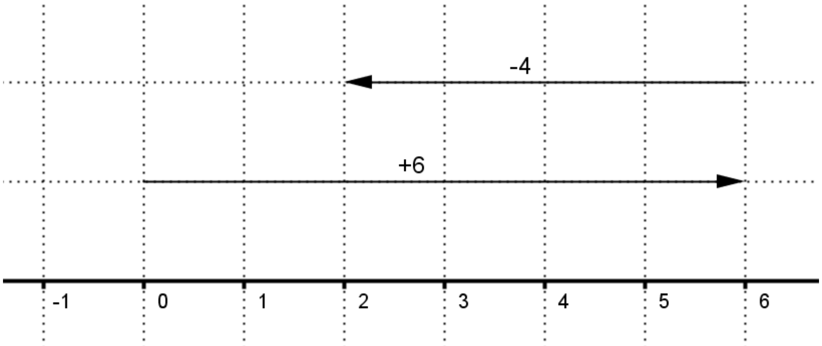
Addieren von Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen

Beispiele :

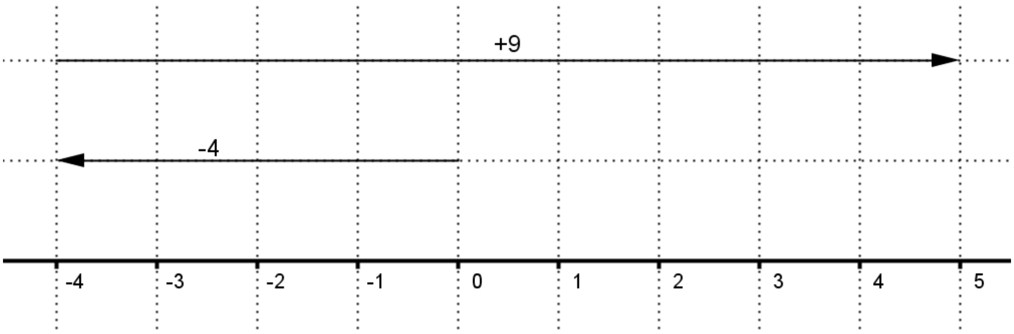
- Positive Zahlen werden durch Pfeile dargestellt, die nach rechts gerichtet sind.
- Negative Zahlen werden durch Pfeile dargestellt, die nach links gerichtet sind.



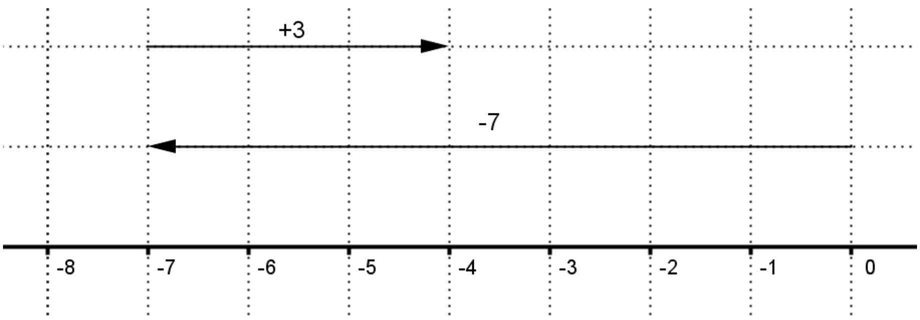
(+2) + (-5) = (-3)



(+6) + (-4) = (+2)



(-4) + (+9) = (+5)



(-7) + (+3) = (-4)

Zwei Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen werden wie folgt addiert :

- man bildet die Beträge und subtrahiert den kleineren vom größeren Betrag
- man gibt der Summe das Vorzeichen, das die Zahl mit dem größeren Betrag hat

Übung :

Rechne :

(+4) + (-16) (-12) + (+20) (-9) + (+5) (+17) + (-5)

Zahlen subtrahieren

Beispiele :

- (+2) + (+4) = (+6)
  daher folgt, dass (+6) – (+2) = (+4) also gilt eigentlich (+6) – (+2) = (+4) = (+6) + (-2)
- (+3) + (-2) = (+1)
  daher folgt, dass (+1) – (+3) = (-2) also gilt eigentlich (+1) – (+3) = (-2) = (+1) + (-3)
- (-4) + (+5) = (+1)
  daher folgt, dass (+1) – (-4) = (+5) also gilt eigentlich (+1) – (-4) = (+5) = (+1) + (+4)

Eine Zahl wird subtrahiert, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl addiert

Übung :

Rechne :

(-5) – (+20) (-3) – (-18) (+6) – (+15) (+3) – (-4,5)

Merke :

Im Zahlenbereich der positiven und negativen Zahlen, kann man uneingeschränkt addieren und subtrahieren.

Achtung.

Die Zeichen "+" und "–" haben folgende Bedeutung :
- Rechenzeichen
- Vorzeichen
- Gegenzahlzeichen

Beispiel :

Rechenzeichen	Vorzeichen	Gegenzahlzeichen
3 **+** 8 drei **plus** acht	(**+**3) **positive** Zahl	**-**(+5) = -5 die **Gegenzahl** von (+5) ist (-5)
3 **–** 8 drei **minus** acht	(**-**3) **negative** Zahl	**-**(-5) = +5 die **Gegenzahl** von (-5) ist (+5)

Daraus folgt, dass man zum Beispiel :

- 5 – 7 als Subtraktion (+5) – (+7) oder als Addition (+5) + (-7) auffassen kann
- -9 – 3 als Subtraktion (-9) – (+3) oder als Addition (-9) + (-3) auffassen kann

Ein paar Übungen...

Übung 1

Rechne.

a) (-2) + (-3)
b) (-2) + (+3)
c) (-1) + (-5)
d) (+5) + (-1)
e) (-25) + (-32)
f) (-56) + (+24)
g) (-34) + (+26)
h) (-167) + (-113)

Übung 2

Rechne.

a) (-2) – (+3)
b) (-5) – (-1)
c) (-2) – (-3)
d) (-1) – (+5)
e) (-20) – (+34)
f) (-22) – (-53)
g) (-565) – (-125)
h) (-125) – (+565)

Übung 3

Schreibe als eine Summe und rechne dann.

A = (+1) – (-2) – (+3)
B = (-10) – (-25) – (+35)
C = -5 – (-3,1) – (-4,1)
D = (-2) + (+3) – (-1) + (-5)
E = (-2) - (+3) + (-3) – (+2)
F = 7,2 – (-6,1) + (-3,6) – (+4,4)

Übung 4

Ergänze die Tabelle (schreibe wenn nötig die Rechnungen auf).

a	**b**	**a + b**	**a – b**	**-a + b**	**-a – b**
2	-3				
-1	6				
-4	-5				
3	7				

Übung 5

Rechne (füge -wenn nötig- Klammern hinzu).

a) -21 – 3 + 5
b) -12,5 + 0,5 – 15
c) -8 – 16 – 24
d) -31 + 41 – 5
e) -125 + 45 + 15
f) -125 – 45 + 15
g) -8,25 + 16,50 + 8,25 – 36,5
h) -8,25 + 16,50 – 8,25 + 36,5

Positive und negative Zahlen multiplizieren

Erinnere dich...

Regel für die Multiplikation zweier positiven und negativen Zahlen :

Man multipliziert zwei Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und das Vorzeichen nach folgender Regel setzt :

- Haben beide Faktoren das gleiche Vorzeichen, so ist das Produkt positiv
- Haben beide Faktoren verschiedene Vorzeichen, so ist das Produkt negativ

Beispiele :

- $(-3)\times 7 = -21$
- $(-2)\times(-4) = +8 = 8$
- $5\times(-0,4) = -2$

Regel für die Multiplikation mehrerer positiven und negativen Zahlen :

Man multipliziert mehrere Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und das Vorzeichen nach folgender Regel setzt :

- Hat ein Produkt eine gerade Anzahl negativer Faktoren, so ist es positiv
- Hat ein Produkt eine ungerade Anzahl negativer Faktoren, so ist es negativ

Beispiele :

- Bei dem Produkt $(-5)\times(-3)\times 2$ sind es insgesamt 3 Faktoren, darunter **2 negative** Faktoren. Da 2 eine gerade Zahl ist, ist das Produkt **positiv**.
- Bei dem Produkt $(-5)\times(-2)\times(-1,1)\times(-8)\times(-9,4)$ sind es insgesamt **5 Faktoren**, die alle **negativ** sind. Da 5 eine ungerade Zahl ist, ist das Produkt **negativ**.

Merke :

Für jede Zahl a gilt :

- $0\times a = 0$
- $1\times a = a$
- $(-1)\times a = -a$

Beispiele :

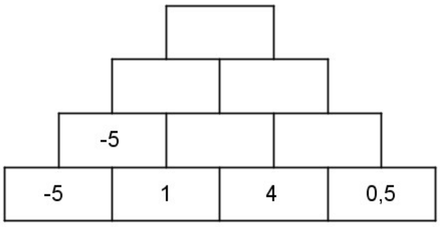
- $(-1)\times 5 = -5$
- $(-1)\times(-7) = -(-7) = +7 = 7$

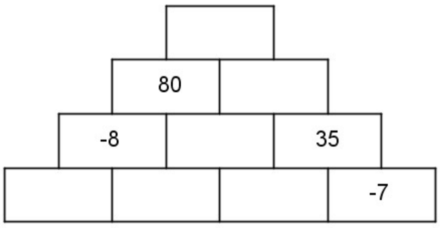
Wortschatz :

- le signe d'un nombre :das Vorzeichen einer Zahl
  Attention.Ne pas confondre avec le signe opératoire qui est désigné simplement par « das Zeichen »
- la partie numérique d'un nombre :der Betrag einer Zahl
  on peut aussi utiliser l'expression « der Abstand zur Zahl 0 »
- le produit :das Produkt
- l'opposé de a :die Gegenzahl von a

Ein paar Übungen...

Übung 1
Ergänze (in jedem Feld soll das Produkt der zwei unteren Felder stehen)





Übung 2
Ergänze die Tabelle.

a	b	$a \times b$	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$
2	-3				
-1	6				
-4	-5				
-1.2	3.2				

Übung 3
Rechne und schreibe dabei den ganzen Rechenweg auf.Beachte die Vorrangregeln.

$A=3\times2-10$

$B=7\times[2-(-8)]$

$C=5-6\times4$

$D=7\times(2-5)\times8$

$E=10-(6\times9-34)$

$F=(10-6)\times9-34$

$G=5\times(-8)-(-8)\times4$

$H=5\times[(-8)-(-8)]\times4$

Übung 4
Rechne wenn gilt : $x=-3$ und $y=-2$

$A=2\times x+y$

$B=2(x-y)$

$C=-(x+4)y-10$

Übung 5
Gib das Vorzeichen des Produktes an.Begründe.

$A=-12\times(-3,4)\times(-5)\times(-0,6)\times(-2,9)$

$B=12\times(-2,8)\times(-0,5)\times10,7\times(-5,8)$

$C=-12\times43,1\times(-15)\times(-0,1)\times(-7,1)$

Übung 6
Rechne geschickt.

$A=(-2)\times(-3,6)\times50$

$B=25\times4,58\times(-4)$

$C=0,1\times(-39)\times(-2)\times(-10)$

$D=(-3,5)\times4\times(-2)\times(-25)\times0,1$

Positive und negative Zahlen dividieren

Erinnere dich...

Regel für die Division zweier positiven und negativen Zahlen :

Man dividiert eine Zahl durch eine andere (verschieden Null), indem man ihre Beträge dividiert und das Vorzeichen nach folgender Regel setzt :
- Haben beide Zahlen das gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv
- Haben die zwei Zahlen verschiedene Vorzeichen, so ist der Quotient negativ

Beispiele :

$12 \div 4 = 3$ $-12 \div (-4) = 3$ $-12 \div 4 = -3$ $12 \div (-4) = -3$

Regeln für das Berechnen von Termen :die Vorrangregeln

- das Innere einer Klammer wird zuerst berechnet
- bei verschachtelten Klammern wird die innere Klammer immer zuerst berechnet
- wenn durch Klammern nichts anderes vorgeschrieben, geht Punktrechnung* vor Strichrechnung**
- sonst wird von links nach rechts gerechnet

die Punktrechnung*: la multiplication allemande () et la division () sont des «opérations à points »
die Strichrechnung** : l'addition () et la soustraction () sont des «opérations à traits »

Beispiel :

$A = -6 + [(-3) - (-2)] \times (+9)$

$A = -6 + (-3 + 2) \times 9$

$A = -6 + (-1) \times 9$

$A = -6 + (-9)$

$A = -15$

Wortschatz :

- le quotient :der Quotient

attention.On dira :« ich rechne den Quotienten...» ou « … mit dem Quotienten...». C'est un *masculin faible* comme « der Bär », « der Junge », « der Buchstabe », « der Exponent », der « Dividend »...

- la valeur approchée au centième :der auf Hundertstel gerundete Wert

« ich runde die Zahl … auf Hundertstel »

- la valeur approchée par défaut au centième :der auf Hundertstel abgerundete Wert

« ich runde die Zahl … auf Hundertstel ab »

- la valeur approchée par excès au centième :der auf Hundertstel aufgerundete Wert

« ich runde die Zahl … auf Hundertstel auf»

Ein paar Übungen...

Übung 1

Ergänze die Tabelle.

a	b	c	$a \times b$	$b \times c$	$a \times b \times c$
2	-3	4			
-1	5	-2			
1.5	-2	-0.5			
20.1	-1	-0.3			

Übung 2

Ergänze die Tabelle.

a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)\times(a-b)$	$((a+b)\div(a-b)$
2	-3				
-4	6				
-4	-5				
-1.5	4.5				

Übung 3 (mit dem Taschenrechner)

1. Runde auf Zehntel.Hast du auf- oder abgerundet ?

$A=-1\div 3$ $B=56\div(-34)$ $C=-1\div(-7)$ $D=(-97)\div(-23)$

2. Runde auf Hundertstel.Hast du auf- oder abgerundet ?

$E=-8\div 13{,}5$ $F=-12\div(-7)$ $G=5{,}6\div(-7{,}1)$ $H=(-58)\div(-0{,}3)$

Übung 4

Rechne und schreibe dabei den ganzen Rechenweg auf.

$A=[(-3)\times 12]\div[(-6)\times 2]$

$B=(-48)\div 4-6\div 2$

$C=[0{,}75-(-0{,}25)]\times(-31{,}6-3{,}4)$

$D=18{,}7-18{,}7\times 2-2$

Übung 5

Rechne $E=ab-c$ und $F=a\div(b+c)$, wenn gilt :

1. $a=-3$; $b=-4$ und $c=-1$
2. $a=-6$; $b=2$ und $c=-3$

Übung 6

Füge Klammern hinzu, damit das Ergebnis stimmt :

a) $20-100\div 5-3\times 10=15$ b) $20-100\div 5-3\times 10=30$ c) $20-100\div 5-3\times 10=-400$

Übung 7

a und b sind zwei negative Zahlen. Gib das Vorzeichen folgender Zahlen an.

1. ab
2. $-a\div b$
3. $-ab$
4. $-a-b$
5. $(-a)\times(-b)$
6. $a\div b$
7. $a+b$
8. $a\div(-b)$

Potenzen

Erinnere dich...

Merke :
a und b bezeichnen rationale Zahlen ungleich 0 ; n und m bezeichnen natürliche Zahlen ungleich 0

Potenz :
Produkte aus gleichen Faktoren lassen sich als Potenzen schreiben :
Die Potenz a^n ist das Produkt mit n gleichen Faktoren a : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n Faktoren}}$

In der Potenz $c = a^n$ heißen :
- a Basis oder Grundzahl,
- n Exponent oder Hochzahl,
- c Potenzwert.

Wortschatz :
Jede Potenz a^2 heißt Quadratzahl, jede Potenz a^3 heißt Kubikzahl

Merke :
- $a^1 = a$;
- $1^n = 1$;
- $0^n = 0$

Beispiele :

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000000$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$(-5)^2 = -5 \times (-5) = 25$

Vorzeichen einer Potenz :
Der Wert einer Potenz mit einer negativen Basis ist :
- positiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist,
- negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

Beispiele :

$(-2)^2 = -2 \times (-2) = 4$

$(-2)^3 = -2 \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^4 = -2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

$(-2)^5 = -2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$

Kehrwert einer Potenz :

a^{-n} ist der Kehrwert von a^n : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ daher folgt : $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ und $a^0=1$

Merke :

Die Potenz eines Bruches mit dem Exponenten n ist gleich mit der Potenz des Kehrwerts dieses Bruches mit dem Exponenten (-n) : $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

Rechnen mit Potenzen :

- Der Inhalt von Klammern wird immer zuerst berechnet, dann kommt das Potenzieren vor den vier Grundrechenarten.
- Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält : $a^n \times a^m = a^{(n+m)}$
- Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält : $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$
- Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält : $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält : $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Rechne.

a) 2^6 b) $(-3)^5$ c) 7^3 d) $(-5)^4$ e) $(-15)^0$ f) 0^{24} g) $0{,}2^2$ h) $(-0{,}5)^3$

i) 2^{-2} j) 3^{-3} k) $(-4)^{-2}$ l) $(-11)^{-1}$ m) $(-12)^{-2}$ n) $(-1)^{-13}$ o) $0{,}1^{-2}$ p) 1^{-12}

Übung 2

Rechne und kürze das Ergebnis vollständig :

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ c) $\left(-\frac{1}{7}\right)^3$ d) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$ e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

Übung 3

Schreibe unter der Form a^n, wobei n eine ganze (positive oder negative) Zahl ist.

a) 25 c) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{25}$ g) $-\frac{1}{8}$ i) $-\frac{1}{27}$

b) -27 d) 0,25 f) 0,04 h) 0,0001 j) $\frac{25}{16}$

Übung 4

Welche der folgenden Zahlen sind gleich ?

$A=10^2\times10^3$ $C=10\times10^{-8}\times10^2$ $E=\left(10^{-1}\right)^5$

$B=\left(10^2\right)^3$ $D=\frac{10^9}{10^3}$ $F=\frac{10^{12}\times10^{-3}}{10^4}$

Übung 5

Schreibe unter der Form a^n, wobei n eine ganze Zahl ist.

a) $2^4\times2^2$ d) $(-3)^3\times2^3$ g) $4^{-2}\times4^{-1}$

b) $\frac{2^5}{2^3}$ e) $(-3)^2\times(-3)^3$ h) $6^{-1}\times7^{-1}$

c) $5^2\times4^2$ f) $\frac{3^2}{3^6}$ i) $\frac{5}{5^2}$

Übung 6

Rechne und schreibe dabei den ganzen Rechenweg auf.

$A=3\times4^2+5$

$B=5\left(2^2-3\times8\right)$

$C=(-3)^2+6\times2^3$

$D=4+3^{-2}$

$E=(3\times4)^2+5$

$F=\frac{1}{2}+2^{-2}$

$G=-5-2^{-1}$

$H=(-0{,}4)^2\times10^3-5\times3^2+(-3)3\times2$

Übung 7

Es gilt : $A = 3 \times 10^4$ und $B = 4 \times 10^3$

Rechne :

- $A \times B$
- $A \div B$
- $A + B$
- $A - B$

Übung 8

Eine Firma liefert Knöpfe in folgender Verpackung :

Auf einem Streifen sind 3 Knöpfe, ein Kärtchen besteht aus 3 Streifen, eine Schachtel enthält 3 Kärtchen, in einem Päckchen sind 3 Schachteln und in einem Karton sind drei Päckchen.

a) Wie viele Knöpfe enthält insgesamt ein Karton?

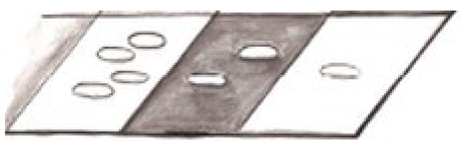
b) Ein Händler bestellt 729 Knöpfe. Wie viele Kartons werden geliefert ?

Zum Knobeln...

Übung 9

Wie viele Blätter sind es am 5. Tag ? Am 10. Tag ? Am 35. Tag ?

Übung 10



Mark legt Reiskörner auf ein Schachbrett. Er legt ein Korn auf das erste Feld, 2 Körner auf das zweite Feld, 4 auf das dritte Feld, usw. Die Anzahl der Reiskörner wird also stets verdoppelt.

Auf welches Feld legt Mark das 1000. Reiskorn ?

Zehnerpotenzen

Erinnere dich...

Zehnerpotenz :
Die Zehnerpotenzen sind die Potenzen der Zahl 10 :Potenzen mit der Grundzahl 10 und einem ganzzahligen Exponenten
Da die Zahl 10 in unserem Stellenwertsystem eine äußerst wichtige Rolle spielt, kann man sehr große (und sehr kleine Zahlen) mithilfe von Zehnerpotenzen schreiben.

Für Zehnerpotenzen verwendet man im Deutschen folgende Namen :

- 10^2 = 1 Hundert
- 10^3 = 1 Tausend
- 10^6 = 1 Million
- 10^9 = 1 Milliarde
- 10^{12} = 1 Billion
- 10^{15} = 1 Billiarde
- 10^{18} = 1 Trillion
- 10^{21} = 1 Trilliarde

Kehrzahl einer Zehnerpotenz :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

wo n eine natürliche Zahl bezeichnet.

Wissenschaftliche Schreibweise :
Jede Dezimalzahl kann als Produkt einer Dezimalzahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz geschrieben werden : $\pm a \times 10^{\pm n}$ ($1 \leq a < 10$)

Das nennt man :« *wissenschaftliche Schreibweise* » oder « *physikalische Schreibweise* » oder « *Darstellung mit abgetrennter Zehnerpotenz* » oder « *scientific notation* »

Mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise lassen sich z. B. Naturkonstanten übersichtlicher angeben.

Zum Beispiel :

- 1 Lichtjahr (1Lj) ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt :
  1 Lj $\approx 9{,}4605 \times 10^{12}$ km
- die mittlere Entfernung Sonne-Erde beträgt ungefähr : $1{,}496 \times 10^{8}$ km
- die Masse des Wasserstoffatoms ist : $1{,}67 \times 10^{-24}$ g.

Rechnen mit abgetrennten Zehnerpotenzen :

- beim Addieren und Subtrahieren wird das Distributivgesetz angewendet :
  $5{,}62 \times 10^{-4} - 8{,}03 \times 10^{-4} = (5{,}62 - 8{,}03) \times 10^{-4} = -2{,}41 \times 10^{-4}$
- sind die Exponenten der abgetrennten Zehnerpotenzen nicht gleich, müssen sie angeglichen werden :

  $2{,}8 \times 10^{3} + 1{,}3 \times 10^{2} = 2{,}8 \times 10^{3} + 0{,}13 \times 10^{3} = 2{,}93 \times 10^{3}$
- beim Multiplizieren (bzw. Dividieren) werden die Potenzgesetze angewendet :

  $2{,}8 \times 10^{3} \times 1{,}3 \times 10^{-2} = 2{,}8 \times 1{,}3 \times 10^{3} \times 10^{-2} = 3{,}64 \times 10^{1} = 36{,}4$
  $\dfrac{5{,}42 \times 10^{4}}{0{,}8 \times 10^{-3}} = \dfrac{5{,}42}{0{,}8} \times \dfrac{10^{4}}{10^{-3}} = 6{,}785 \times 10^{7}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Ergänze die Tabelle :

Zehnerpotenz	10^{-3}			10^{-5}	10^{2}	
Dezimalschreibweise			0.01			
Bruchschreibweise		$\frac{10}{1}$				$\frac{1}{10000}$

Übung 2

Verbinde jede Zahl mit ihrer wissenschaftlichen Schreibweise.

317 •	• $3{,}17\times10^{0}$
0,317 •	• $3{,}17\times10^{5}$
317 000 •	• $3{,}17\times10^{-1}$
0,00317 •	• $3{,}17\times10^{-2}$
3,17 •	• $3{,}17\times10^{2}$
0,0317 •	• $3{,}17\times10^{-3}$

Übung 3

$A=\frac{5\times10^{8}\times11\times10^{3}}{22\times10^{5}}$ und $B=\frac{49\times10^{-4}\times75\times10^{5}}{35\times\left(10^{-3}\right)^{2}}$

Gib die Dezimalschreibweise und die wissenschaftliche Schreibweise folgender Zahlen an.

- A
- B
- $A+B$
- $A-B$
- $A\times B$
- $\frac{B}{A}$

Übung 4

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt ungefähr dreihundert Millionen Meter pro Sekunde.

1. Gib die wissenschaftliche Schreibweise dieser Geschwindigkeit an !
2. Im Wasser beträgt die Lichtgeschwindigkeit nur drei viertel der Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raum.
   Berechne die Lichtgeschwindigkeit im Wasser und gib ihre wissenschaftliche Schreibweise an.

Übung 5

1 mm^{3} Blut enthält ungefähr 6000 weiße Blutkörperchen (Leukozyten) und 5 Millionen rote Blutkörperchen (Erythrozyten). Ein rotes Blutkörperchen ist eine Scheibe mit dem Durchmesser 7 µm (1 µm = 10^{-6} m)

1. Wie viel weiße Blutkörperchen enthält 1L Blut ? Gib die wissenschaftliche Schreibweise an !
2. a) Ein Mensch verfügt über ungefähr 5 L Blut. Berechne die Anzahl der roten Blutkörperchen. Gib die wissenschaftliche Schreibweise an !
   b) Wie lang wäre die Strecke, die man mit diesen roten Blutkörperchen -dicht aneinander gestellt- bilden könnte ?

Teiler und Vielfache
Division mit Rest

Erinnere dich...

Division ganzer Zahlen :

Frage : Welche Zahl muss man mit 6 multiplizieren, um 42 zu erhalten ?
Man rechnet : $42 \div 6 = 7$, denn $7 \times 6 = 42$.

$7 \times 6 = 42$ ist gleichwertig mit $42 \div 6 = 7$
Bei der Division $42 \div 6 = 7$ heißt 7 der Quotient, 42 der Dividend und 6 der Divisor

Teiler und Vielfache :

- 81 ist ein Vielfaches von 3, denn es gilt :$3 \times 27 = 81$
- 3 ist ein Teiler von 81, da $3 \times 27 = 81$
- $81 = 1 \times 81$
  $81 = 3 \times 27$
  $81 = 9 \times 9$
  Die Teiler von 81 sind also 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81

Merke :
Alle Vielfachen von 2 heißen gerade Zahlen, alle anderen ganzen Zahlen heißen ungerade Zahlen.

Teilbarkeitsregeln :

Teiler	Bedingung für die Zahl	Beispiel
2	Wenn ihre Endziffer durch 2 teilbar ist	568 ist durch 2 teilbar weil 8 durch 2 teilbar ist
4	Wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen	568 ist durch 4 teilbar weil 68 durch 4 teilbar ist
5	Wenn sie auf 0 oder 5 endet	560 und 565 sind durch 5 teilbar
10	Wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist	560 ist durch 10 teilbar
3	Wenn ihre Quersumme (d. h. die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist	402 ist durch 3 teilbar, weil ihre Quersumme 4+0+2 = 6 durch 3 teilbar ist.
9	Wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist	765 ist durch 9 teilbar, weil ihre Quersumme 7+6+5 = 18 durch 9 teilbar ist.

Division mit Rest :

Beispiel :

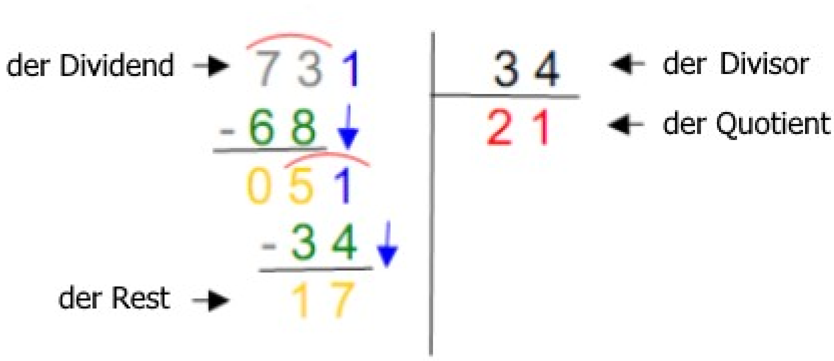
Eine Packung enthält 38 Bonbons, die man unter 7 Kinder verteilen möchte.
Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind ?

Man rechnet :$38 = 5 \times 7 + 3$
Das heißt, dass jedes Kind 5 Bonbons bekommt. Es bleiben dann 3 Bonbons übrig

$38 = 5 \times 7 + 3$ heißt, dass :$38 \div 7 = 5$ **Rest** 3 Bei dieser Divison ist 38 der Dividend, 7 der Divisor, 5 der Quotient und 3 der Rest

Merke :
der Rest muss immer kleiner als der Divisor sein.

Verfahren :
Man möchte die Division mit Rest $731 \div 34$ durchführen :



- In 73 sind **2** mal 34 und $2 \times 34 =$ **68**
  $73 - 68 =$ **5** und wir holen die 1 runter
- In 51 ist **1** mal **34** und $1 \times 34 = 34$
  $51 - 34 =$ **17**

Es gilt also :
$731 = 21 \times 34 + 17$

das heißt :

Dividend = Quotient × Divisor + Rest

und der **Rest** ist **kleiner als der Divisor** !

Ein paar Übungen...

Übung 1

1. Nenne drei Vielfache von 5, zwei Vielfache von 13.
2. Nenne vier Teiler von 36, zwei Teiler von 7, drei Teiler von 50.
3. Nenne alle Teiler von 12 und von 30

Übung 2

1. Welche Zahl muss man durch 9 teilen, um 72 zu erhalten ?
2. Mit welcher Zahl muss man 4 multiplizieren, um 64 zu erhalten ?
3. Welche Zahl muss man mit 13 multiplizieren, um 130 zu erhalten ?
4. Welche Zahl muss man mit 9 multiplizieren, um 99 zu erhalten ?
5. Durch welche Zahl muss man 56 teilen, um 8 zu erhalten ?

Übung 3

Gib alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 6 an.
Warum sind sie alle durch 3 teilbar ? Welche sind durch 5 teilbar ? Welche durch 2 ?

Übung 4

Ergänze die Tabelle :

Die Zahl...	ist teilbar durch ...					
	2	4	3	9	5	10
145						
70						
120						
180						
37						
372						
8 574						
6 824						
39 937						

Übung 5

Der Lehrer und einige Schüler haben 345 Kekse gebacken.
Sie verpacken sie in Plastikbeutel für einen Verkauf in der Schule.
Jeder Beutel mit sieben Keksen wird 2,30 € verkauft. Wie viel Geld wird eingenommen ?

Übung 6

Ein Lastwagen darf mit höchstens 15 Tonnen Kies beladen werden.
324 Tonnen Kies sollen für eine Gesellschaft geliefert werden.

1. Wie viele Reisen müssen vorgesehen werden ?
2. Wie viele Tonnen Kies werden für die letzte Reise geladen ?

Übung 7

Ein Blumenhändler bereitet Sträuße mit je 7 Schwertelilien und 9 Osterglocken.
Der Großhändler liefert ihm 200 Blumen jeder Sorte.

1. Wie viele Sträuße kann der Blumenhändler höchstens bereiten ?
2. Wie viele Blumen jeder Sorte muss er noch wenigstens bestellen damit keine Blume übrig bleibt ? Wie viele Sträuße werden dann bereitet ?

4 – NC – 5 – 2 :

Arithmetik

Erinnere dich…

Primzahlen
Eine Zahl p, die außer den Teilern 1 und p (sich selbst) keinen weiteren Teiler hat, heißt Primzahl.
Die Zahl 1 wird nicht zu den Primzahlen gerechnet.

Merke :
Eine ganze Zahl kann immer als Produkt mehrerer Primzahlen geschrieben werden, das ist die Primfaktorenzerlegung.

Beispiele :

- $14 = 2 \times 7$
- $30 = 6 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$
- $36 = 6 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

Zum Staunen :

die goldbachsche Vermutung
« Jede gerade Zahl $n \geq 6$ lässt sich als Summe von zwei ungeraden Primzahlen schreiben »

Probier's mal aus.

Gemeinsame Teiler zweier Zahlen
Ist eine Zahl g Teiler einer Zahl a und Teiler einer Zahl b, so heißt g ein gemeinsamer Teiler von a und von b.

Beispiel :
$28 = 1 \times 28$ $28 = 2 \times 14$ $28 = 4 \times 7$
die Teiler von 28 sind 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 und 28

$36 = 1 \times 36$ $36 = 2 \times 18$ $36 = 3 \times 12$ $36 = 4 \times 9$ $36 = 6 \times 6$
die Teiler von 36 sind 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 und 36

Die gemeinsamen Teiler von 28 und 36 sind also :1 ; 2 und 4

Teilerfremde Zahlen
Zwei Zahlen heißen teilerfremd, wenn sie außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben.

Beispiele :

- Alle Primzahlen sind zueinander teilerfremd.
- Ein Bruch ist vollständig gekürzt wenn sein Nenner und sein Zähler teilerfremde Zahlen sind.

Ein paar Übungen...

Übung 1

1. Sind die Zahlen 55 und 40 teilerfremd ? Begründe.
2. Schreibe den Bruch $\frac{40}{55}$ als einen vollständig gekürzten Bruch. Erkläre dein Verfahren.

Übung 2

Ein Kind hat in seinem Zimmer mit Würfeln gespielt, die alle gleich groß sind.
Er hat sie so aufgestapelt, dass zwei Säulen mit den Höhen 48 cm und 72 cm entsanden sind.

1. Welche Höhe kann ein Würfel haben ? Gib alle Möglichkeiten an.
2. Welche Höhe hat ein Würfel höchstens ?

Übung 3

Ein Handwerker verfügt über Metallplatten, die 110 cm lang und 88 cm breit sind.
Daraus will er mehrere Metallquadrate schneiden, sodass ihre Seitenlänge eine ganze Anzahl cm beträgt, und dass es keinen Verlust gibt.

1. Was sind die verschiedenen Möglichkeiten für die Seitenlänge eines Quadrates ?
2. Wie viele Metallquadrate werden es sein, wenn sie so groß wie möglich sein sollen ?

Übung 4

Ich bin eine dreistellige ganze Zahl, die mit keiner Null geschrieben wird.
Ich bin durch 94 teilbar.
Wird die Reihenfolge meiner Ziffer geändert, werde ich durch 49 teilbar.
Wer bin ich ?

Übung 5

Was ist die kleinste Zahl, die genau 5 Teiler besitzt ?

Übung 6

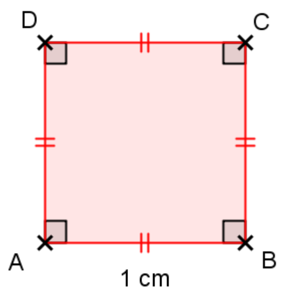
Hugo und seine 11 Feunde haben 109 Bonbons für seine Geburtstagsfeier gesammelt.
Die 12 Freunde streiten sich wegen der Verteilung der Bonbons.
Hugo sagt dann :« Ich opfere mich auf, verteilt euch die Bonbons, ich werde den Rest nehmen »
Was hältst du von diesem Opfer ?

4 – NC – 5 – 3 :

Quadratwurzel

Erinnere dich...

Beispiel :
Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 cm ?



Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in B.
Daher folgt, dass die Gleichheit des Pythagoras erfüllt ist :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 1^2 + 1^2$

$AC^2 = 1 + 1$

$AC^2 = 2$

$AC = \sqrt{2}$

Quadratwurzel
Die Quadratwurzel von a ist die positive Zahl, dessen Quadrat a ist.

Beispiele :

- $3^2 = 9$, wie groß ist also $\sqrt{9}$?
- $2{,}6^2 = 6{,}76$, wie groß ist also $\sqrt{6{,}76}$?
- Gibt es eine Zahl, dessen Quadrat -4 ist ?
- Wie groß ist $\sqrt{1}$?
- Wie groß ist $\sqrt{0}$?
- Wie groß ist (ungefähr) $\sqrt{2}$?
- Wie groß ist (ungefähr) $\sqrt{3}$?
- Was ergibt $\left(\sqrt{5}\right)^2$?
- Was ergibt $\left(\sqrt{7}\right)^2$?

Allgemein gilt für eine positive Zahl a :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Merke dir die Quadratzahlen der natürlichen Zahlen von 1 bis 13 :

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

Rechenregeln

Ergänze die Tabelle :

a	9	25	36
b	16	4	16
$\sqrt{a}$			
$\sqrt{b}$			
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$			
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$			
$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$			
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$			
$\sqrt{a+b}$			
$\sqrt{a-b}$			
$\sqrt{a\times b}$			
$\sqrt{\frac{a}{b}}$			

Merke :

$$\sqrt{(a\times b)}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \quad \text{und} \quad \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Daher folgt, dass für eine positive Zahl a :

$\sqrt{a^2}=\sqrt{(a\times a)}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$, also kurz : $\sqrt{a^2}=a$

Wortschatz :

- Die Umkehrung des Potenzierens heißt das Radizieren oder das Wurzelziehen

- Häufig lässt sich der Radikand der Wurzel vereinfachen, indem man die Wurzel teilweise zieht. Dieses Verfahren nennt man partielles Wurzelziehen.

Beispiel : $\sqrt{18}=\sqrt{(9\times 2)}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

- Das Beseitigen der Wurzel im Nenner durch Erweitern oder Kürzen wird als Rationalmachen des Nenners bezeichnet.

Beispiel : $\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{8\times\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Gib (wenn möglich) die Quadratwurzel folgender Zahlen an.
49 ; 0,01 ; -25 ; 10 000 ; -49 ; 52

Übung 2

Rechne.

$A=\left(\sqrt{7}\right)^2$ $\quad$ $B=\left(\sqrt{7}\right)^3$ $\quad$ $C=\left(2\sqrt{7}\right)^2$ $\quad$ $D=\left(6\sqrt{3}\right)^2$

Übung 3

Rechne.

$A=\sqrt{32}\times\sqrt{2}$ $\quad$ $B=\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $C=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\times\sqrt{12}$

Übung 4

Schreibe unter der Form $a\sqrt{b}$, wo a und b ganze Zahlen sind (b soll so klein wie möglich sein)

$A=\sqrt{28}$ $\quad$ $B=\sqrt{32}$ $\quad$ $C=2\sqrt{50}$ $\quad$ $D=\sqrt{6}\times\sqrt{21}$

Übung 5

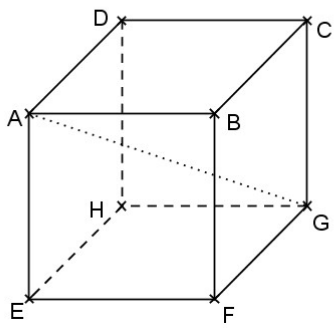
1. Ist $Z=3\sqrt{20}+\sqrt{3}\times\sqrt{12}-2\sqrt{45}$ eine ganze Zahl ?
2. Sind $A=2\sqrt{5}$ und $B=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ Kehrzahlen ?

Übung 6

Für das Dreieck ABC, das in B recthwinklig ist, gilt :AB = $\sqrt{7}$ und BC = $\sqrt{10}$.
Berechne AC.

Übung 7

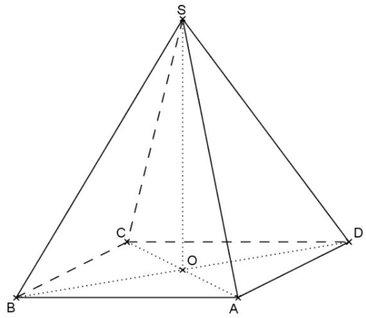
ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 1 dm.
Berechne AG. Gib den exakten Wert an.



Übung 8

Die Grundfläche der Pyramide SABCD ist ein Quadrat mit Mittelpunkt O. SO = 5 cm und SA = 7 cm.

Berechne den Rauminhalt der Pyramide.



Übung 9

Ergänze folgende Tabelle :

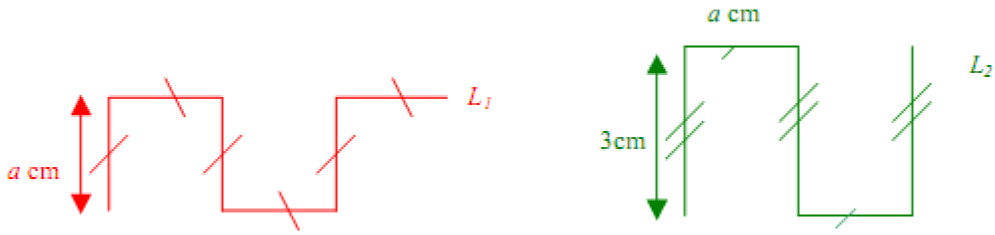
	$\frac{-3\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{325}{25}$	$-\frac{273}{8}$	5×10^{2}	5×10^{-2}	$\frac{37}{3}$	$\frac{648}{3}$
natürliche Zahl								
ganze Zahl								
Dezimalzahl								
rationale Zahl								
irrationale Zahl								

4 – NC – 6 – 1 :

Rechnen mit Variablen

Erinnere dich...

Beispiel :



- Schreibe die Länge L_1 in Bezug auf a
- Schreibe die Länge L_2 in Bezug auf a
- Vergleiche die Längen L_1 und L_2 wenn gilt :a = 2.

Zusammenfassen

- $a+a+a = 3\times a = 3a$
  Berechne $3a$ wenn gilt : $a=4$
- $a\times b = ab$
  Berechne ab wenn gilt : $a=5$ und $b=7$
- $4\times(x-1) = 4(x-1)$
  Berechne $4(x-1)$ wenn gilt : $x=10$
- $11+4\times y = 11+4y$
  Berechne $11+4y$ wenn gilt $y=2$
- $x\times x = x^2$
  Berechne x^2 wenn gilt : $x=7$
- $y\times y\times y = y^3$
  Berechne y^3 wenn gilt $y=2$

Ein paar Übungen...

Übung 1
Schreibe für jede Frage den Preis mit der Variablen x :

1. Ein Schraubenzieher kostet x €. Wie teuer sind 3 Schraubenzieher ?
2. Ein Buch ist x € teurer als eine CD ; das Buch kostet 22 €. Wie teuer ist die CD ?
3. 4 Stifte kosten x €. Wie teuer ist ein Stift?
4. Ein Hemd kostet x € ; ein T-shirt ist 10 € billiger. Wie teuer sind 3 T-shirts ?
5. Eine Postkarte kostet x € ; eine Briefmarke ist 1,5 € billiger.
   Wie viel bezahlt man, wenn man eine Postkarte und eine Briefmarke kauft ?

Übung 2

Ich denke an eine Zahl.
Ich multipliziere sie mit 8 und ziehe dann 4 von dem Ergebnis ab.

1. Ich denke an die Zahl 6. Wie groß ist das Ergebnis ?
2. Es sei x die Zahl, an die ich denke. Wie wird das Endergebnis geschrieben ?
3. Wie groß ist das Endergebnis wenn gilt :

a) $x=3$?

b) $x=2$?

Übung 3
Fasse zusammen :

$2\times x$	$4-3\times a$	$c\times c\times c\times 3$
$y\times 3$	$5-x\times 3$	$a\times a+b\times b$
$a\times b\times c$	$a\times a$	$4-a\times a$
$4\times a\times 5$	$2\times b\times b$	$4\times 4-b\times b$

Übung 4
Schreibe für jede Figur ihren Umfang mit der Variablen x :

1. Dreieck mit den Seitenlängen 3 ; 4 ; x
2. Quadrat mit der Seitenlänge x
3. Rechteck mit der Länge 10 und der Breite x
4. Kreis mit dem Radius x
5. Kreis mit dem Durchmesser x

Übung 5
Elena ist 3 Jahre älter als Kai und 6 Jahre jünger als Leo.
x bezeichnet Elenas Alter.
Wie werden Kais und Leos Alter ion Bezug auf x geschrieben ?

Übung 6

ABCD ist ein Rechteck mit der Länge 8 und der Breite $x-1$.
EFGH ist ein Rechteck mit der Länge 6 und der Breite x

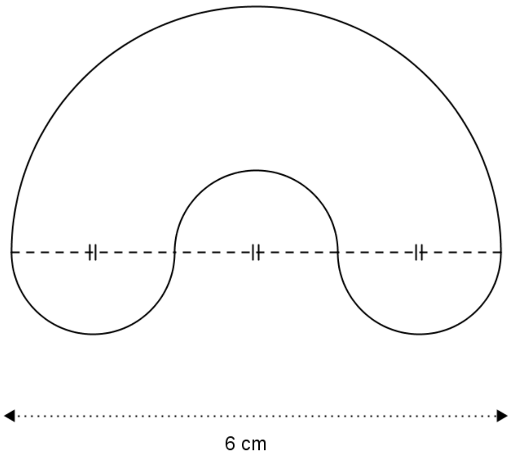
1. Schreibe den Umfang des Rechtecks EFGH in Bezug auf x .
   Berechne ihn wenn gilt : $x=3$

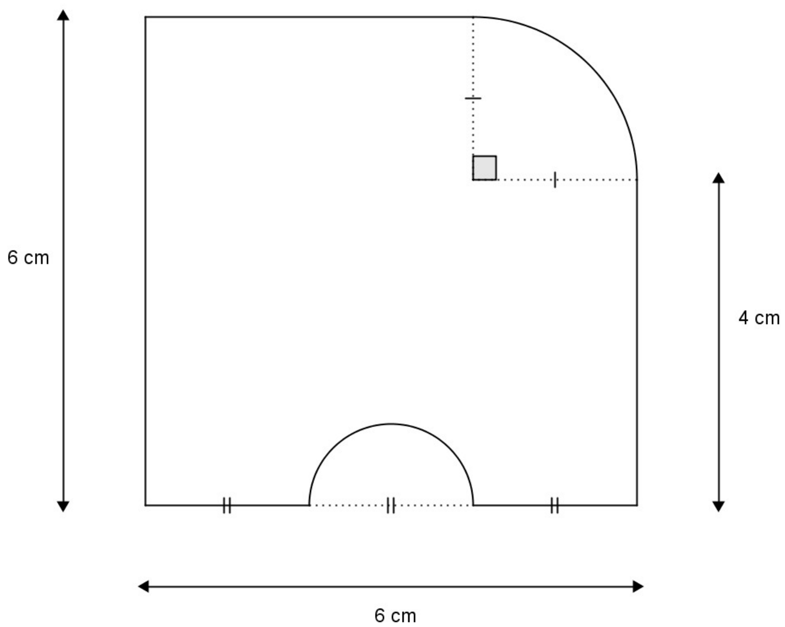
2. Schreibe den Flächeninhalt beider Rechtecke in Bezug auf x .
   Sind die Flächeninhalte gleich wenn gilt :

a) $x=3$? b) $x=4$?

Übung 7

Berechne den Flächeninhalt der Figuren in Bezug auf π% :

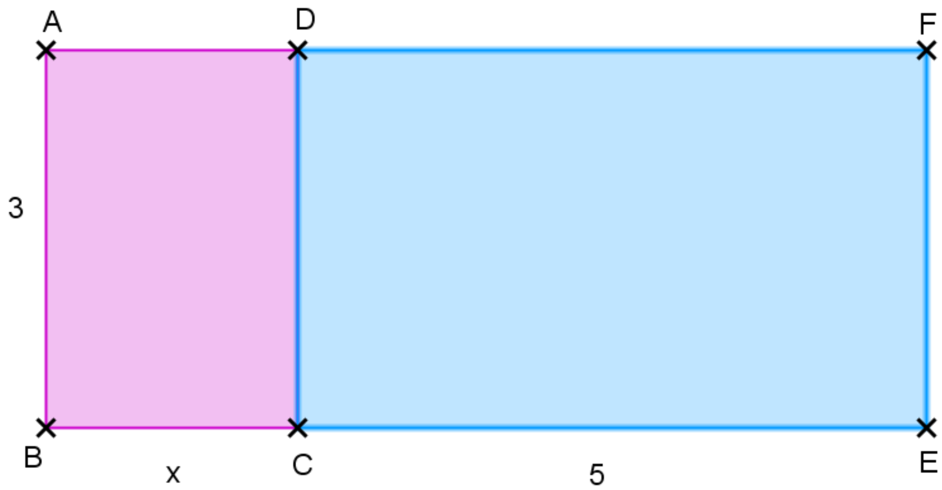




Das Distributivgesetz

Erinnere dich...

Beispiel :



Flächeninhalt von ABEF = Flächeninhalt von ABCD + Flächeninhalt von DCEF
Daher folgt, dass :

$$3\times(x+5) = 3\times x + 3\times 5$$

Ausmultiplizieren

$$7(x+3) = 7\times(x+3) = 7\times x+7\times 3 = 7x+21$$

Das Produkt $7(x+3)$ wurde mithilfe des Distributivgesetzes in die Summe $7x+21$ umgewandelt.
Man nennt dies Ausmultipizieren.

Beispiele :
Multipliziere aus :

$A=3(2x-1)$

$B=5(4x+8)$

Geschickte Rechnungen

- $8\times 105 = 8\times(100+5) = 8\times 100+8\times 5 = 800+40 = 840$
- $5\times 99 = 5\times(100-1) = 5\times 100-5\times 1 = 500-5 = 495$
- $9\times 107 = 9\times(100+7) = 9\times 100+9\times 7 = 900+63 = 963$
- $7\times 98 = 7\times(100-2) = 7\times 100-7\times 2 = 700-14 = 686$

Ausklammern

$15+5t \;=\; 5\times 3 \;+\; 5\times t \;=\; 5\times(3+t) \;=\; 5(3+t)$

Die Summe $15+5t$ wurde mithilfe des Distributivgesetzes in das Produkt $5(3+t)$ umgewandelt.
Man nennt dies Ausklammern.

Beispiele :

Klammere aus :

$A=40-10x$ $\qquad$ $B=21+3x$ $\qquad$ $C=3x-3y$

Geschickte Rechnungen

- $1{,}6\times 3+1{,}6\times 7 \;=\; 1{,}6\times(3+7) \;=\; 1{,}6\times 10 \;=\; 16$
- $2{,}13\times 117-2{,}13\times 17 \;=\; 2{,}13\times(117-17) \;=\; 2{,}13\times 100 \;=\; 213$

Zusammenfassen

Beispiel :

$7x+8x \;=\; 7\times x+8\times x \;=\; (7+8)\times x \;=\; 15\times x \;=\; 15x$

Verfahre ähnlich um folgende Ausdrücke zusammenzufassen :

$9y-8y$ $\qquad$ $3m-m$ $\qquad$ $4n+n-2n$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Ich denke an eine Zahl.
Ich zähle 5 dazu und multipliziere dann das Ergebnis mit 7.

1. Es sei x die Zahl, an die ich denke. Wie wird das Endergebnis geschrieben ?
2. Wie groß ist das Endergebnis wenn gilt :

1.a. $x = 2$ 1.b. $x = 0{,}7$ 1.c. $x = 3{,}1$

Übung 2

Wende das Distributivgesetz an, und multipliziere folgende Ausdrücke aus.

1. $3 \times (a + 2)$
2. $5 \times (b - 3)$
3. $(5 + c) \times 4$
4. $(7 - d) \times 6$

Übung 3

Wende das Distributivgesetz an, und klammere folgende Ausdrücke aus.

1. $3 \times x + 3 \times 5$
2. $2 \times z - 2 \times 8$
3. $t \times 1{,}5 - 1{,}5 \times 6$
4. $5 \times x + 5$

Übung 4

Wende das Distributivgesetz an, und klammere folgende Ausdrücke aus.

1. $2x - 6$
2. $7y + 14x - 49$
3. $15x + 25$
4. $21t - 49y$

Übung 5

Wende das Distributivgesetz an, um folgende Ausdrücke zu berechnen :

A = 99 × 13
B = 2,1 × 13 + 2,1 × 7
C = 102 × 15
D = 15,7 × 21,5 – 5,7 × 21,5
E = 98 × 25
F = 13,7 × 11,2 + 86,3 × 11,2

Übung 6

Fasse folgende Ausdrücke zusammen :

1. $7x+x-4x$
2. $x+x+x$
3. $3y+4+2y+7$
4. $6x-x+1$

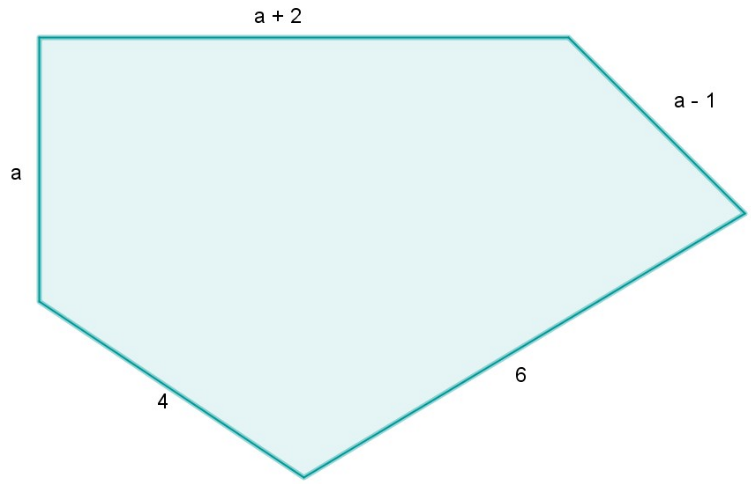
Übung 7

Multipliziere die Ausdrücke aus und fasse sie dann zusammen.

1. $2(3x+1)+2x$
2. $10y+4(3-2y)$
3. $5(2+2x)-3x$
4. $2(2x+3)+3(2+3x)$

Übung 8

1. Schreibe den Umfang der Figur (so einfach wie möglich.) mit der Variablen *a*.
2. Berechne denn Umfang wenn gilt :
   - $a = 2$
   - $a = 7$



Übung 9

Paul ist zwei Jahre jünger als seine Frau Sylvia.
Sylvia ist drei mal älter als ihr Sohn Theo.
Theo ist zwei Jahre älter als seine Schwester Maria.

1. x bezeichnet das Alter von Maria.
   Drücke das Alter aller Familienmitglieder mit der Variablen x aus.
2. Schreibe die Summe der Alter mit der Variablen x .
3. Die Summe der Alter beträgt 100 Jahre.
   a) Wie alt ist Maria ?
   b) Wie alt sind die anderen Familienmitglieder ?

Gleichwertige Ausdrücke

Wortschatz :

- eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch das Relationszeichen « = » verbunden sind.
- Eine Gleichung, in der keine Variable auftritt, ist ein wahre oder falsche Aussage

Erinnere dich...

Beispiel :

- $3 + 5 = 4 \times 2$ ist eine wahre Aussage
- $3 + 1 = 8 \div 4$ ist eine falsche Aussage
- $4x+2x = 6x$ ist eine Gleichung, die durch Einsetzen von beliebigen Werte immer zu einer wahren Aussage wird.
- $x+2=x$ ist eine Gleichung, die durch Einsetzen von beliebigen Werte immer zu einer falschen Aussage wird.
- $x+1=3$ wird nur dann zu einer wahren Aussage, wenn $x=2$

Frage 1 :

Wird die Gleichung $2x+1=5$ zu einer wahren Aussage, wenn $x=2$?

Wir berechnen den Wert des Terms $2x+1$ wenn $x=2$:

$$2x+1 = 2\times2+1 = 4+1 = 5$$

Die Gleichung $2x+1 = 5$ wird also zu einer wahren Aussage, wenn $x=2$
Die Terme $2x+1$ und 5 sind also gleichwertig für $x=2$

Frage 2 :

Wird die Gleichung $5x-3 = 2x$ zu einer wahren Aussage, wenn $x=2$?

Wir berechnen -getrennt - die Werte der Terme $5x-3$ und $2x$ wenn $x=2$:

- $5x-3 = 5\times2-3 = 10-3 = 7$
- $2x = 2\times2 = 4$

Die Gleichung $5x-3 = 2x$ wird also zu einer falschen Aussage, wenn $x=2$
Die Terme $5x-3$ und $2x$ sind also nicht gleichwertig für $x=2$

Frage 3 :

Wird die Gleichung $10+5x = 7x$ zu einer wahren Aussage, wenn $x=5$?

Wir berechnen -getrennt - die Werte der Terme $10+5x$ und $7x$ wenn $x=5$:

- $10+5x = 10+5\times5 = 10+25 = 35$
- $7x = 7\times5 = 35$

Die Gleichung $10+5x = 7x$ wird also zu einer wahren Aussage, wenn $x=5$
Die Terme $10+5x$ und $7x$ sind also gleichwertig für $x=5$

Frage 4 :

Wird die Gleichung $2x+3 = 3x+2$ zu einer wahren Aussage, wenn $x=3$?

Wir berechnen -getrennt - die Werte der Terme $2x+3$ und $3x+2$ wenn $x=3$:

- $2x+3 = 2\times3+3 = 6+3 = 9$
- $3x+2 = 3\times3+2 = 9+2 = 11$

Die Gleichung $2x+3 = 3x+2$ wird also zu einer falschen Aussage, wenn $x=3$
Die Terme $2x+3$ und $3x+2$ sind also nicht gleichwertig für $x=3$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Wird die Gleichung $4x+5 = 33$ zu einer wahren Aussage, wenn gilt :

a) $x=4$? b) $x=5$? c) $x=7$?

Übung 2

Wird die Gleichung $8-x = 3x$ zu einer wahren Aussage, wenn gilt :

a) $x=1$? b) $x=2$? c) $x=3$?

Übung 3

Wird die Gleichung $7x-11 = 2x$ zu einer wahren Aussage, wenn gilt :

a) $x=1{,}6$? b) $x=2{,}4$? c) $x=3{,}2$?

Übung 4

Uns interessieren folgende Ausdrücke :

$A=7(x-2)$ $B=4(6+x)$ $C=5x+5\times 3$ $D=9x-36$

1. Multipliziere A und B aus.
2. Klammere C und D aus.
3. Berechne den Wert dieser Ausdrücke für $x=5$ und für $x=7{,}2$!
4. Sind die Ausdrücke A und C gleichwertig wenn $x=11$? Wenn $x=14{,}5$?

Übung 5

Uns interessiert folgende Gleichung : $3(x+4)-7 = 5(x+1)-2x$

1. Sind ihre Terme gleichwertig wenn $x=1$? Wenn $x=7$? Wenn $x=9{,}2$?
2. Multipliziere jeden Term der Gleichung aus. Was fällt dir auf ? Was kannst du daraus schließen ?

Übung 6

Uns interessiert folgendes Rechenprogramm :

- eine Zahl wählen
- diese Zahl mit 0,5 multiplizieren
- 3 dazu zählen
- mit 2 multiplizieren
- 6 abziehen

1. Wende dieses Rechenprogramm für verschieden Zahlen an .
2. Was fällt dir auf ?
3. Wie könnte man deine Vermutung beweisen ?

4 – NC – 6 – 4 :

Vereinfachen von Summen
das doppelte Distributivgesetz

Erinnere dich...

Vereinfachen von Summen :
Gleichartige Terme können addiert oder subtrahiert werden.
Beim Auflösen einer Minusklammer kehren sich die Vorzeichen der Summanden um.

Beispiele :

$8x+(-7+6x)=8x-7+6x=14x-7$

$8x-(-7+6x)=8x+7-6x=2x+7$

Vereinfachen von Produkten :
Terme werden miteinander multipliziert, indem man zunächst die Zahlfaktoren (Koeffizienten) und danach die Variablen miteinander multipliziert.

Beispiel :

$3x\times 4\times 2x=(3\times 4\times 2)\times(x\times x)=24x^2$

Ausmultiplizieren und Ausklammern :
Beim Ausmultiplizieren wird jeder Summand in der Klammer mit dem Außerhalb der Klammer stehenden Faktor multipliziert.
Haben Summanden gemeinsame Faktoren, so können diese ausgeklammert werden.

Beispiele :

Ausmultiplizieren :

$-4(5+4x)=-4\times 5+(-4)\times 4x=-20-16x$

$-2x\times(5x-3)=-2x\times 5x-(-2x\times 3)$
$=-10x^2+6x$

Ausklammern :

$-15+5x=5\times(-3)+5\times x=5(-3+x)$

$12x^2-18x=6x\times 2x-6x\times 3=6x(2x-3)$

Multiplizieren von Summen :
Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert. Die entstandenen Produkte werden anschließend addiert.

Beispiele :

$(x+7)(2x-4)=2x^2-4x+14x-28=2x^2+10x-28$

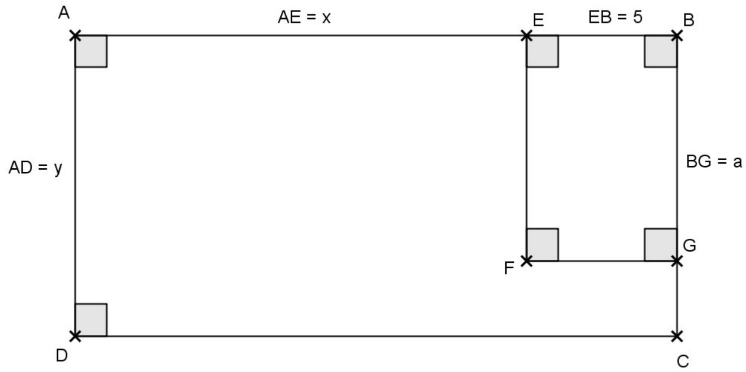
$(3x-4)(2x+1)=6x^2-8x+3x-4=6x^2-5x-4$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Der Sicherheitsabstand D zwischen zwei Autos, die mit der gleichen Geschwindigkeit V fahren, wird folgenderweise berechnet :
$D = 8 + 0,2V + 0,003V^2$, wo V in Stundenkilometer angegeben wird.
Wie groß ist dieser Sicherheitsabstand, wenn die Autos 50 km/h schnell fahren ?

Übung 2



Welche Größen werden mit folgenden Ausdrücken berechnet ?

$x+5$	$2(5+a)$	$y-a$
$5\times a$	$5+a$	$y\times(x+5)$
$(5\times a)\div 2$	$2x+2y+10$	$5(y-a)\div 2$

Übung 3

Ein Hühnerei wiegt durchschnittlich 63g.

- Das Eiweiß ist doppelt so schwer wie das Eigelb
- Das Eigelb ist doppelt so schwer wie die Eierschale

Wie viel wiegt die Eierschale ?

Übung 4

n bezeichnet eine positive ganze Zahl. Sind folgende Zahlen gerade oder ungerade ?
$2n + 2$; $2n – 3$; $4n$; $2n + 5$; $2n – 2$

Übung 4

Richtig oder falsch ? Begründe.

- Die Summe zwei aufeinander folgenden Zahlen ist immer eine ungerade Zahl.
- Die Summe drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer ein Vielfaches von 3.
- Für jede beliebige ganze Zahl n ist $(n + 1)^2 – (n – 1)^2$ ein Vielfaches von 4.

Übung 5

Tom soll $3,5^2$ berechnen.
« Du brauchst den Taschenrechner nicht », sagt Julia « du musst einfach das Produkt von 3 mit 4 berechnen und 0,25 dazuzählen »

1. Überprüfe, dass Julias Rechnung tatsächlich $3{,}5^2$ ergibt.
2. Wie kann man ähnlich $7{,}5^2$ berechnen ?
3. Julia vermutet, dass $(n+0{,}5)^2 = n(n+1) + 0{,}25$, wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Hat Julia recht ?

Übung 6

Uns interessiert folgendes Rechenprogramm :

- eine Zahl wählen
- diese Zahl mit (-2) multiplizieren
- 5 dazu zählen
- das Ergebnis mit 5 multiplizieren
- das Endergebnis aufschreiben

1. Überprüfe, dass das Endergebnis 5 ist, wenn die Anfangszahl 2 ist.
2. Was ist das Endergebnis, wenn die Anfangszahl 3 ist ?
3. Welche Zahl sollte man wählen, wenn man als Endergebnis 0 erhalten will ?
4. Tobias behauptet, dass für eine beliebige Anfangszahl x , das Endergebnis $(x-5)^2-x^2$ geschrieben werden kann.
   Hat er recht ?

Übung 7

Uns interessieren zwei Rechenprogramme :

Rechenprogramm A	**Rechenprogramm B**
• eine Zahl wählen • 1 der gewählten Zahl abziehen • Das Quadrat des Ergebnisses berechnen • Das Doppelte der Anfangszahl dazu zählen	• eine Zahl wählen • Das Quadrat der gewählten Zahl berechnen • 1 dazurechnen

1. Überprüfe, dass das Rechenprogramm A 10 ergibt, wenn die Anfangszahl 3 ist.
2. Was ergibt das Rechenprogramm B wenn die Anfangszahl 3 ist ?
3. Was ergibt das Rechenprogramm A wenn die Anfangszahl -2 ist ?
4. Welche Anfangszahl(en) soll man wählen, wenn man als Endergebnis mit dem Rechenprogramm B 5 erhalten will ?
5. Henry behauptet, dass beide Rechenprogramme immer dasselbe ergeben. Hat er recht ?

4 – NC – 6 – 5 :

Gleichungen
Teil 1

Erinnere dich…

Gleichung :
Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch das Gleichheitszeichen « = » verbunden sind.

Beispiele :

- 19 – 7 = 12
- $3x-7=5$
- $3(x+2)=3x+6$

Gleichungen lösen :
Uns interessieren hier Gleichungen in denen eine Variable auftritt :
Eine Gleichung lösen, heißt dann die Zahl zu finden, die beim Einsetzen in die Variable eine wahre Aussage erzeugt. Man sagt dann auch, dass diese Zahl die Gleichung erfüllt.

Beispiele :

- 19 – 7 = 12 ist eine wahre Aussage
- 14 – 8 = -6 ist eine falsche Aussage
- $3x-7=5$ ist eine falsche Aussage für $x=1$
- $3x-7=5$ ist eine wahre Aussage für $x=5$
- $3(x+2)=3x+6$ ist eine allgemein gültige Gleichung
- $2x-5-2x=3$ hat keine Lösung

Beim Lösen einer Gleichung sind Äquivalenzumformungen erlaubt :

- auf beiden Seiten der Gleichung darf derselbe Term addiert oder subtrahiert werden.
- beide Seiten der Gleichung dürfen mit derselben Zahl (außer) 0 multipliziert oder dividiert werden.
- Auflösen von Klammern, Ausklammern, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Ordnen und zusammenfassen gehören zu den Umformungen, die auch nur auf einer Seite der Gleichung vorgenommen werden können.

Merke :
So werden Gleichungen gelöst :

- Vereinfachen der Terme auf beiden Seiten
- Ordnen der Summanden mit Variablen auf der einen Seite und der Summanden ohne Variablen auf der anderen Seite.
- Dividieren beider Seiten durch den Zahlfaktor der Variablen

Ein paar Übungen...

Übung 1
Löse folgende Gleichungen.

a) $x-7=-4$

b) $3x+5=2x-2$

c) $3(2x+5)=-7(3-x)$

d) $-4(2-4x)-3(5x+1)=0$

Übung 2
Löse folgende Gleichungen.

a) $3x=27$

b) $3x+7=1$

c) $6x+12=-2x+4$

d) $7-2x=x+8$

Übung 3
Löse folgende Gleichungen.

a) $\frac{x}{4}+1=5$

b) $\frac{3}{2}x+2=\frac{1}{4}x$

c) $\frac{x+3}{2}=\frac{1-2x}{3}$

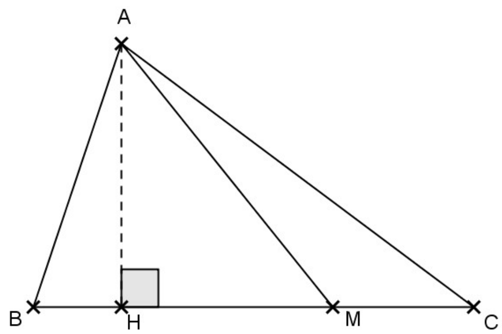
d) $-8=\frac{12}{2x-3}$

Übung 4
In meinem Geldbeutel habe ich 17 Münzen.
Es sind nur 20- oder 50-cents Münzen. Insgesamt beträgt die Summe 7€.
Wie viele Münzen jeder Art habe ich ?

Übung 5
Tom und Lisa spielen Karten. Lisa hat drei Karten weniger als Tom.
Wenn Lisa Tom 2 Karten gibt, dann hat er doppelt so viele Karten wie sie.
Wie viele Karten haben die beiden?

Übung 6
Finde drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, deren Summe 2007 ergibt.
Finde drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, deren Summe 2008 ergibt.

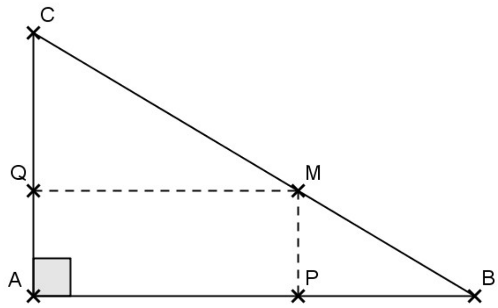
Übung 7
M gehört zur Seite [BC] des Dreiecks ABC.
AH = 3 cm und BC = 5 cm.
Wann sind die Flächeninhalte der Dreiecke ABM und AMC gleich ?



Übung 8

APMQ ist ein Rechteck.
Es gilt :AP = 4 cm, AC = 3 cm und PM = 2 cm.

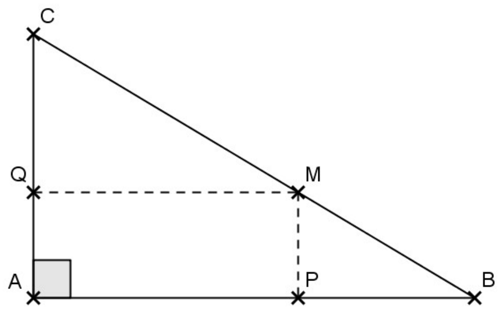
1. Berechne PB. *(Hinweis :denke an den Strahlensatzn um zuerst AB zu berechnen)*
2. Berechne BC. Runde auf Zehntel.



Übung 9

APMQ ist ein Rechetck .
Es gilt :AB = 4 cm und AC = 3 cm.

1. x bezeichnet die Länge PB. Berechne die Länge PM in Bezug auf x .
2. Schreibe den Umfang des Rechtecks APMQ in Bezug auf x .
3. Wann beträgt der Umfang des Rechtecks 7 cm² ?



4 – NC – 6 – 6 :

Die binomischen Formeln - ausmultiplizieren

Erinnere dich...

Beispiel :

$$A=(x+3)^2 \qquad B=(4-3x)^2$$
$$A=(x+3)(x+3) \qquad B=(4-3x)(4-3x)$$
$$A=x^2+3x+3x+9 \qquad B=16-12x-12x+9x^2$$
$$A=x^2+6x+9 \qquad B=16-24x+9x^2$$

$$C=(2x+3)(2x-3)$$
$$C=4x^2-6x+6x-9$$
$$C=4x^2-9$$

Merke dir :

Ganz generell gilt :

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b) \text{ und } (a-b)^2=(a-b)(a-b)$$

Daher folgt, dass :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Diese Formeln heißen die binomischen Formeln.
Dank diesen Formeln kann man ein Produkt in eine Summe umwandeln :mann kan ausmultipizieren.

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm :

Uns interessiert eine ganze Zahl n, die größer gleich 1 ist.
S bezeichnet das Quadrat der nächstgrößeren ganzen Zahl.
P bezeichnet das Quadrat der nächstkleineren ganzen Zahl.
D bezeichnet die Differenz der Zahlen S und P.

Übung :

1. Berechne -mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramm- die Differenz D für alle Werte von n zwischen 1 und 90.
2. Vergleiche die Zahlen n und D. Was fällt dir auf ?
3. Schreibe D in Bezug auf n und beweise anschließend, dass deine Vermutung richtig war.

Ein paar Übungen...

Übung 1

Multipliziere aus.

$A=3+2(3x-2)$

$B=(2-3x)(-2x+5)$

$C=(-4x-4)(x-4)$

$D=-(x+3)-4(x+5)$

Übung 2

Multipliziere aus und fasse zusammen.

$A=(3-2x)(2x-4)+(x+3)(4-3x)$

$B=(3-3x)(2x+4)-(x-3)(4+3x)$

Übung 3

Multipliziere aus und fasse zusammen.

$A=(2x+3)^2$

$B=(3x-2)^2$

$C=(4x+5)(4x-5)$

$D=(2x-3)^2+(3x-2)^2$

Übung 4

Multipliziere aus und fasse zusammen.

$A=4-(5x+1)^2$

$B=3(6x+2)+(7x-3)^2$

$C=(x+1)^2-(x+6)^2$

$D=(2x+1)^2-(2x-1)^2$

Übung 5

Es sei x eine Zahl, die zwischen 0 und 10 liegt.
Uns interessiert ein Dreieck ABC, sodass :
AB = $x+8$; AC = $x+7$ und BC = 5.

1. Ist das Dreieck ABC rechtwinklig, wenn gilt :

a) $x=4$?
b) $x=0$?
Hinweis :Denke an Pythagoras.

2. Gibt es einen Wert von x , sodass das Dreieck ABC rechtwinklig wird ?

Übung 6

Berechne ohne Taschenrechner.

$A=1004^2$

$B=998\times1002$

$C=678\times682-680^2$

$D=999^2$

$E=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)^2$

4 – NC – 6 – 7 :

Die binomischen Formeln - Faktorisieren

Erinnere dich...

Kannst du noch einen Ausdruck ausklammern ?

Beispiele :

$$A=3x^2+9x-6x^2$$
$$A=3x\times x+3x\times 3-3x\times 2x$$
$$A=3x(x+3-2x)$$
$$A=3x(-x+3)$$

$$B=3(2+3x)-(5+2x)(2+3x)$$
$$B=(2+3x)[3-(5+2x)]$$
$$B=(2+3x)(3-5-2x)$$
$$B=(2+3x)(-2x-2)$$

Kennst du diese Formeln noch ?

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Dank diesen Formeln kann man auch eine Summe in ein Produkt umwandeln :mann kan faktorisieren.

Beispiele :

$$A=4x^2+12x+9$$
$$A=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2$$
$$A=(2x+3)^2$$

$$B=9x^2-4$$
$$B=(3x)^2-2^2$$
$$B=(3x+2)(3x-2)$$

$$C=25+16x^2-40x$$
$$C=16x^2-40x+25$$
$$C=(4x)^2-2\times 4x\times 5+5^2$$
$$C=(4x-5)^2$$

Attention.

- factoriser à l'aide d'un facteur commun se dit « ausklammern »
- factoriser à l'aide d'une identité remarquable se dit « faktorisieren »

Ein paar Übungen...

Übung 1
Klammere aus :

$A=4x+4$

$B=2x-8$

$C=9x^2-5x$

$D=x(x+5)+x(3x+2)$

Übung 2
Klammere aus :

$E=(x+5)(2x+1)+6(2x+1)$

$F=-4x(2x+3)+(2x+3)(9x-2)$

$G=(1-2x)(9x-1)-(9x-1)(7+3x)$

$H=(x+3)(y+9)+x+3$

Übung 3
Klammere aus :

$I=(2x+1)^2+(3x-8)(2x+1)$

$J=(4x+5)^2-(3x-6)(4x+5)$

$K=(5+x)(8-3x)+(x+5)^2$

$L=(9x+7)^2-9x-7$

Übung 4
Faktorisiere :

$M=x^2+8x+16$

$N=x^2-2x+1$

$P=x^2-10x+25$

$Q=9x^2+6x+1$

Übung 5
Faktorisiere :

$R=x^2-16$

$S=4-x^2$

$T=16a^2-25$

Übung 6
Faktorisiere :

$U=x^2-6x+9$

$V=x^2+4x+4$

$W=(x+1)^2-9$

$X=4x^2+12x+9$

$Y=(5x-3)^2-x^2$

$Z=9x^2-30x+25$

Übung 7
$A=x^2+10x+25-(3x+4)^2$

1. Multipliziere A aus und fasse dann zusammen.
2. Faktorisiere $x^2+10x+25$
3. Faktorisiere A.

Übung 8
$B=(6x-4)(x+7)-(9x^2-4)$

1. Multipliziere B aus und fasse zusammen
2. Klammere $6x-4$ aus.
   Faktorisiere $9x^2-4$.
3. Klammere B aus.

4 – NC – 6 – 8 :

Gleichungen
Teil 2

Erinnere dich…

Produktgleichung

Wann gilt :

- $3 \times x = 0$?
- $a \times (-8) = 0$?
- $a \times b = 0$?

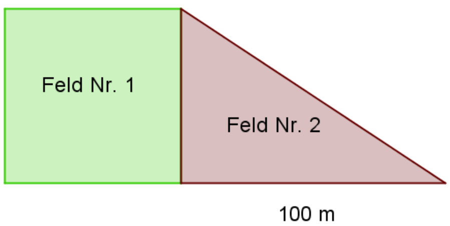
Merke dir :

Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich 0 ist.

Beispiele :

- Löse folgende Gleichung :
  $(4x+6)(3-7x)=0$

- Zwei Landwirte besitzen zwei Felder. Das erste Feld ist ein Quadrat, das zweite Feld hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete auch eine Seite des Quadrates ist. Die andere Kathete ist 100 m lang.
  Beide Felder haben den gleichen Flächeninhalt.
  Berechne die Seitenlänge des quadratischen Feldes.



Produktgleichung und Quadratwurzel

Beispiel :
Löse die Gleichung $x^2 = 7$

Merke dir :

$a \geq 0$
Die Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ sind $-\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Löse folgende Gleichungen :

a) $3x^2+2x=0$

b) $5(x+6)+2x(x+6)=0$

c) $x^2-18x+81=0$

d) $9x^2-25=0$

e) $x^2+2x+1=0$

f) $-(7x+2)-5x(7x+2)=0$

Übung 2

Löse folgende Gleichungen :

a) $x^2=8$

b) $x^2=125$

c) $3x^2=180$

d) $(x+1)^2-1=0$

e) $(x-5)^2=\frac{1}{9}$

f) $4x^2-4x+1=0$

g) $(7x+1)^2-(3x+4)^2=0$

Zum Knobeln...

Übung 3

Der Radfahrer Toni fährt um 14 h von Aheim nach Beheim mit der Geschwindigkeit 24 km.h^{-1}.
Ein zweiter Radfahrer, Lino, startet um 14 h 15 min in die gleiche Richtung mit der Geschwindigkeit 32 Stundenkilometer.

1. Angenommen, dass der erste Radfahrer t Stunden braucht bis zum Treffpunkt, wie viel Zeit braucht der zweite Radfahrer ?
2. Drücke die Antwort als Term mit der Variablen t aus.
3. Drücke dann die Entfernung von Aheim zum Treffpunkt für jeden der zwei Radfahrer jeweils als Term mit der Variablen t aus.
4. Wann überholt der Radfahrer Lino den Radfahrer Toni ?

Übung 4

1. Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 847.
   Bestimme diese Zahlen.
2. Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 417.
   Bestimme diese Zahlen.
3. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 1246. Bestimme diese Zahlen.

Übung 5

Die kleinste Seite eines Dreiecks ist 3,5 cm kürzer als die mittlere Seite.
Diese ist um 2,1 cm kürzer als die längste Seite.
Der Umfang des Dreiecks beträgt 37 cm.
Berechne die Länge der einzelnen Seiten.

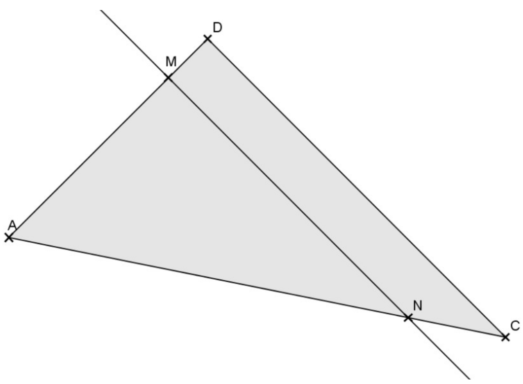
Übung 6

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist um 16 cm² größer als der Flächeninhalt des Quadrats B.
Die Breite des Rechtecks A ist genauso groß wie die Seitenlänge des Quadrats B.
Die Länge des Rechtecks beträgt 8 cm.
Bestimme die Flächeninhalte der Vierecke A und B

Übung 7

Arno hat 2 gleich teure CDs gekauft. Ihm bleiben dann 9,50€.
Wären die CDs 1€ billiger gewesen, dann hätte er mit seinen ganzen Ersparnisse 3 kaufen können.
Wie teuer ist eine CD ?

Übung 8

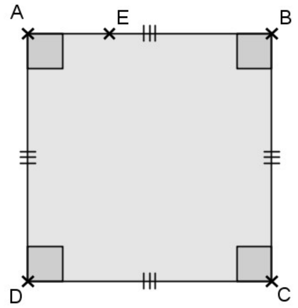


ACD ist ein Dreieck.
M liegt auf [AD] und N liegt auf [AC]
(MN) // (CD)
NC = 3 cm ; MN = 5 cm und DC = 9 cm.
Wie lang ist [AN] ?

Übung 9

ABCD ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm.
E liegt auf der Strecke [AB].
Wann ist der Flächeninhalt des Quadrates ABCD das Dreifache des Flächeninhaltes von AED ?

Hinweis :Wähle AE = x



Übung 10

Uns interessiert folgendes Rechenprogramm :

- eine Zahl wählen
- 4 dazuzählen
- das Ergebnis mit der Anfangszahl multiplizieren
- 4 dazuzählen

Wie kann man 1 erhalten ?

Übung 11

Kann das Quadrat des Doppelten einer negativen Zahl gleich 100 sein ?
Begründe deine Antwort.

Übung 12

Wenn die Seitenlänge eines Quadrates um 3 cm größer wird, dann wird sein Flächeninhalt vervierfacht.
Wie groß war das ursprüngliche Quadrat ?

Und mit Geogebra...

Übung 13

Herr Strohmann besitzt ein Grundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat.
Seine Katheten sind 50 und 80 m lang.
Er möchte für seine zwei Kinder dieses Grundstück parallel zur Hypotenuse halbieren.

Wie soll die Trennlinie verlaufen ?

1. Beantworte diese Frage zeichnerisch mit Geogebra.
2. Beantworte dann diese Frage rechnereisch.

4 – NC – 6 – 9 :

Ungleichungen

Erinnere dich…

Ungleichung
Eine Ungleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch eines der Relationszeichen $<$; $>$; $\leq$; $\geq$ verbunden sind.

Beispiel :

$4x+5>12$

$4x^2+2<4x^2$

Eine Ungleichung lösen, heißt alle Zahlen zu finden, die beim Einsetzen in die Variable eine wahre Aussage erzeugen.
Diese Zahlen heißen dann Lösungen der Ungleichung und sie bilden die Lösungsmenge.

Lösen einer Ungleichung
Um eine Ungleichung zu lösen, versucht man sie durch entsprechende Umformungen so weit zu vereinfachen, dass die gesuchte Variable isoliert auf einer Seite steht.

1. Auflösen von Klammern, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Ordnen und Zusammenfassen gehören zu den Umformungen, die auch nur auf einer Seite der Gleichung vorgenommen werden können.

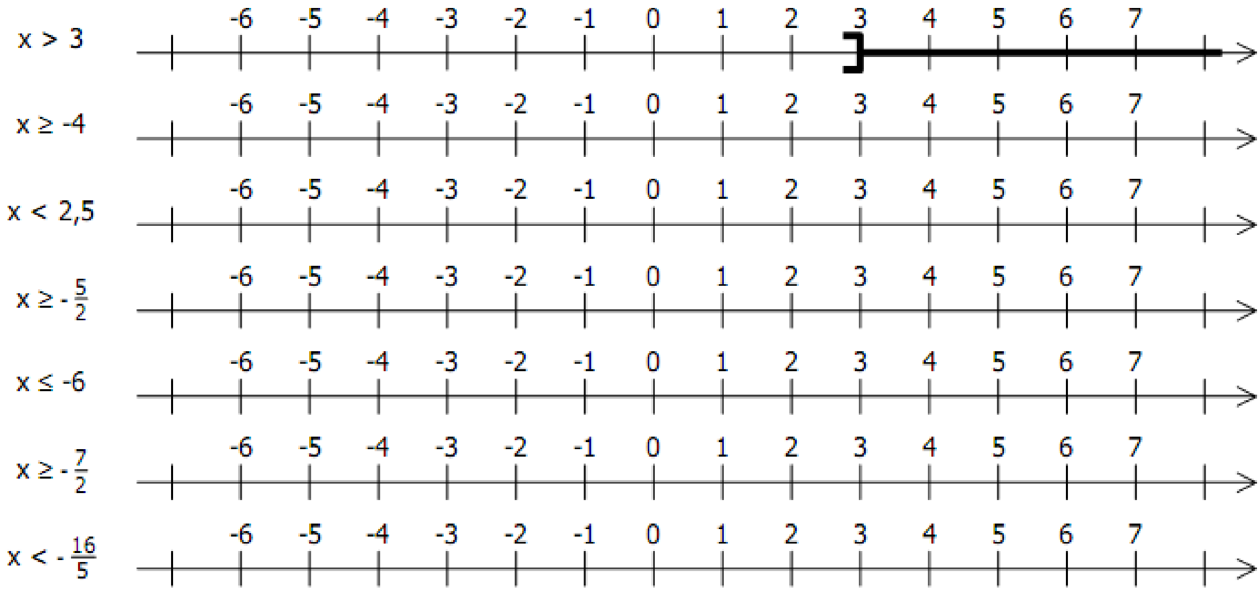
2.

Umformungen, die auf beiden Seiten der Ungleichung vorgenommen werden müssen.	Beispiele
Seiten vertauschen, mit Umkehrung des Relationszeichen.	$-5\leq x$ $x\geq -5$
Addition bzw. Subtraktion der gleichen Zahl (oder des gleichen Terms) auf beiden Seiten.	$4x+3>2$ $4x>-1$
Multiplikation und Division mit der gleichen positiven Zahl (außer 0) auf beiden Seiten.	$4x<20$ $\quad \frac{x}{3}\geq -2$ $x<5$ $\quad x\geq -6$
Multiplikation und Division mit der gleichen negativen Zahl (außer 0) auf beiden Seiten, mit Umkehrung des Relationszeichen.	$-2x<8$ $\quad -\frac{1}{3}x\geq 1$ $x>-4$ $\quad x\leq -3$

Ein paar Übungen...

Übung 1

Färbe die Teilgerade, die uns interessiert :



Übung 2

Löse folgende Ungleichungen und stelle die Lösungsmenge auf einer Zahlengeraden dar :

1. $3x-4 \leq 4(x-2)$
2. $-4(x-5) > x-5$
3. $12-8x+4(3x-5) < 2x-3$
4. $-9x-7-(9-6x) \geq 5x+8$

Übung 3

Die Summe dreier aufeinander folgende ganze Zahlen ist kleiner gleich 12.
Welche Werte sind für die kleinste dieser ganzen Zahlen möglich ?

Übung 4

Der Umfang eines Rechtecks ist kleiner als 37 cm. Seine Breite beträgt 5,3 cm.
Wie groß kann seine Länge sein ?

Übung 5

Was sind die moglichen Werte von x wenn gilt : $-4 \leq -3x-7 \leq 2$?

Übung 6

Uns interessiert die Ungleichung $\frac{x+2}{5} - 3 \geq x + \frac{2x-1}{2}$

1. Ist 0 eine Lösung dieser Ungleichung ?
2. Ist -2 eine Lösung dieser Ungleichung ?
3. Löse diese Ungleichung und stelle die Lösungsmenge auf einer Zahlengeraden dar.